Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2015-2016

Introduction à l'analyse
Devoir maison n°1 - à rendre jeudi 15 octobre 2015

Exercice 1

On considère E et F deux ensembles non vides finis, de même cardinal. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si f est injective, alors l'ensemble $f(E)$ a le même nombre d'éléments que F. En déduire que f est surjective.
2. Montrer que si f n'est pas injective, alors il existe un élément de F qui n'est l'image d'aucun élément de E. En déduire que f n'est pas surjective.
3. Montrer les équivalences

$$(f \text{ injective}) \iff (f \text{ surjective}) \iff (f \text{ bijective}).$$

4. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, non surjective. Puis donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, non injective.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(1) = 2$ et

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $f(0) = 1$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = f(x)^n$.
3. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = 2^n$.
4. Montrer que $f(r) = 2^r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. On pourra écrire $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et utiliser les deux questions précédentes.
5. On suppose de plus que f est croissante. Montrer que $f(x) = 2^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.