Petit formulaire bien utile

Formules trigonométriques

On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$ et sont $2\pi-$périodiques, la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et est $\pi-$périodique.

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(-x)=-\sin x$	$\cos(-x)=\cos x$	$\tan(-x)=-\tan x$
$\sin(\pi-x)=\sin x$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\tan(\pi-x)=-\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$
$\sin 2x=2\sin x\cos x$	$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2 x-\sin^2 x\\ 2\cos^2 x-1\\ 1-2\sin^2 x\end{cases}$	$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

lorsque, dans la dernière ligne, $t=\tan(\frac{x}{2})$.

Les formules d'addition et transformation de sommes en produits

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	
$\cos p+\cos q=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$	$\cos p-\cos q=-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$	$\sin p-\sin q=2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

Pour $a,b\in\mathbb{R}$ et $x,y\in\mathbb{R}$, on a aussi

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi),$$

où φ vérifie

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\text{et}\quad\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Quelques limites

$$\frac{\sin h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}1,\quad \frac{1-\cos h}{h^2}\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{1}{2},\quad \frac{\tan h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}1.$$

Dérivées - Primitives

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$\sin'(x)=\cos x$	$\cos'(x)=-\sin x$	$\tan'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$	$\int\cos x\,dx=\sin x+c$	$\int\tan x\,dx=\ln\lvert\cos x\rvert+c$

Notation trigonométrique pour les nombres complexes

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\quad \cos x=\Re e(e^{ix})=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\quad \sin x=\Im m(e^{ix})=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

Fonctions hyperboliques

On rappelle que les fonctions sinus hyperbolique sh, cosinus hyperbolique ch et tangente hyperbolique th sont définies sur $\mathbb{R}$. Par définition,

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

En particulier, on a

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction sh prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction ch prend ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et la fonction th prend ses valeurs dans l'intervalle $]-1, 1[$.

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 & \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} & 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x & \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x \\
\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x & \operatorname{ch} 2x = \begin{cases} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \\ 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \end{cases} & \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.
\end{array}$$

Les formules d'addition et transformation de sommes en produits

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a & \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} & \\
\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) & \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) & \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{array}$$

Dérivées - Primitives

Les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x & \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x & \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c & \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c & \int \operatorname{th} x \, dx = \ln(\operatorname{ch} x) + c
\end{array}$$

Fonctions réciproques

Si on restreint les ensembles de définition du sinus, du cosinus et de la tangente, il est possible d'obtenir des fonctions bijectives.

L'application $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective. Son application réciproque est appelée arcsinus

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] ;$$

elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1[.$$

De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\arcsin x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ -x + (2k+1)\pi & \text{si} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'application $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective. Son application réciproque est appelée arccosinus

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] ;$$

elle est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

De plus, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arccos x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} -x+2k\pi & \text{si} \quad x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi] \\ x-2k\pi & \text{si} \quad x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'application $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Son application réciproque est appelée arctangente

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[;$$

elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On fait maintenant la même chose pour les fonctions hyperboliques.

L'application $\text{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Son application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique

$$\text{argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ;$$

elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

L'argument sinus hyperbolique s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\text{argsh}\, x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

L'application $\text{ch} : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ est bijective. Son application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique

$$\text{argch} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[;$$

elle est dérivable sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée vaut

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{pour tout } x > 1.$$

L'argument cosinus hyperbolique s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\text{argch}\, x = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big) \quad \text{pour tout } x \geq 1.$$

L'application $\text{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ est bijective. Son application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique

$$\text{argth} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} ;$$

elle est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

L'argument tangente hyperbolique s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\text{argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

Quelques identités remarquables

- Somme des premiers termes d'une progression géométrique :

$$1+q+\cdots+q^n=\sum_{k=0}^{h} q^k=\begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q=1, \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q\neq 1. \end{cases}$$

- Pour $a,b\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$ ($n\geq 1$) :

$$\begin{aligned} a^n-b^n &= (a-b)\big(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\big) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k. \end{aligned}$$

En particulier,

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad \text{et} \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

- Somme des n premiers entiers :

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- Binôme de Newton (pour $a,b\in\mathbb{C}$) :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ &\dots \\ (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}, \quad \text{où} \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n=\prod_{k=1}^{n} k. \end{aligned}$$

- Somme de sinus et cosinus : pour $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x)=1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$S_n(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x)=n+1$ et $S_n(x)=0$.

Quelques primitives

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c, \quad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{1\},$$

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$$

$$\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+c, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$$

$$\int \sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+c, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$$

$$\int \operatorname{ch} ax\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{sh} ax+c, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$$

$$\int \operatorname{sh} ax\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{ch} ax+c, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+c, \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+c, \quad x\in]-1,1[,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\operatorname{argsh} x+c, \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\begin{cases} \operatorname{argch} x+c & \text{si} \quad x\geq 1 \\ -\operatorname{argch}(-x)+c & \text{si} \quad x\leq -1 \end{cases},$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}+c, \quad x\neq\pm 1,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{argth} x+c, \quad x\in]-1,1[.$$