Université d'Aix-Marseille **Année 2016-2017**
Licence de Mathématiques Générales - L2 **Analyse 2**

Examen partiel du 15 novembre 2016 – durée : 2h

Version avec corrigé détaillé

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Questions de cours – Comparaison des séries à termes positifs

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes ≥ 0, on note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles d'ordre n correspondantes.

1. *Condition nécessaire et suffisante de convergence.* Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (U_n) est majorée.

2. *Critère de majoration à l'infini.* On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ pour n au voisinage de $+\infty$, c'est à dire qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et $K > 0$ tels que pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq K\, v_n$. Montrer que

$$\begin{array}{rlcl} a) & \sum v_n \text{ converge} & \Longrightarrow & \sum u_n \text{ converge} \\ b) & \sum u_n \text{ diverge (vers } +\infty) & \Longrightarrow & \sum v_n \text{ diverge (vers } +\infty)\ . \end{array}$$

3. *Critère d'équivalence à l'infini.* On suppose que $u_n \sim_{+\infty} v_n$ pour n au voisinage de $+\infty$, c'est à dire qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes toutes deux).

4. *Application au critère de convergence de Riemann.* En choisissant comme série de comparaison la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), rappeler les résultats de convergence/divergence (correspondant à ceux qui précèdent) qu'on obtient pour la série $\sum u_n$.

– Corrigé –

1. **Condition nécessaire et suffisante de convergence.** Comme le terme général u_n de la série est ≥ 0, la suite des sommes partielles (U_n) est croissante car $U_{n+1} - U_n = u_{n+1} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit par le théorème des suites monotones que la suite (U_n) converge (c'est à dire par définition que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge) si et seulement si la suite (U_n) est majorée et on a alors la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Si la suite (U_n) n'est pas majorée, alors $U_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge avec une somme infinie.

2. **Critère de majoration à l'infini.** On suppose que $u_n = \mathcal{O}_{+\infty}(v_n)$, *i.e.* à partir d'un certain rang N, on a $u_n \leq K\, v_n$ et donc

$$0 \leq \sum_{k=N}^{n} u_k \leq K \sum_{k=N}^{n} v_k \leq K \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \Longrightarrow \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + K\, V_n.$$

Alors, cette dernière inégalité nous permet de montrer, avec le résultat précédent, les implications $a)$ et $b)$.
En effet, si la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la suite (V_n) est majorée et donc aussi la suite (U_n) par l'inégalité ci-dessus. Il s'ensuit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge également et l'on a l'inégalité entre les sommes :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + K \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, c'est que $U_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, et donc la suite (V_n) n'est pas majorée (car sinon, (U_n) le serait également et elle convergerait ce qui n'est pas le cas). Il s'ensuit finalement que $V_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

3. **Critère d'équivalence à l'infini.** On suppose que $u_n \sim_{+\infty} v_n$, *i.e.* à partir d'un certain rang, on a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$ pour $n \to +\infty$. Comme ε_n tend vers zéro, $|\varepsilon_n|$ est majoré par exemple par $1/2$ à partir d'un rang assez grand. Il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que (v_n étant ≥ 0) :

$$\frac{1}{2}\, v_n \leq u_n = v_n(1+\varepsilon_n) \leq \frac{3}{2}\, v_n, \quad \forall n \geq N.$$

Les résultats précédents $a)$ et $b)$ permettent alors de conclure que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature, soit convergentes toutes les deux, soit divergentes toutes les deux.

4. **Application au critère de convergence de Riemann.** On choisit la série de Riemann pour la comparaison, soit $v_n = 1/n^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) pour $n \geq 1$. On sait que cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$. Il vient alors immédiatement d'après ce qui précède pour $N \in \mathbb{N}$ et $K > 0$:

$$(i) \qquad \text{Si pour } \alpha > 1, \text{ on a } \forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{K}{n^\alpha} \qquad \text{alors} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}$$

$$(ii) \qquad \text{Si pour } \alpha \leq 1, \text{ on a } \forall n \geq N, \quad u_n \geq \frac{K}{n^\alpha} \qquad \text{alors} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge (vers } +\infty)$$

$$(iii) \qquad \text{Si on a} \quad u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{K}{n^\alpha} \qquad \text{alors} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge SSi } \alpha > 1.$$

Exercice 1 – Nature de séries numériques

Déterminer, en la justifiant, la nature (convergente, absolument convergente, semi-convergente, divergente) de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{3^n}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right), \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right).$$

– Corrigé –

1. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{3^n}$ est à termes > 0 et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\,\frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty.$$

Le critère de convergence de d'Alembert (par comparaison avec une série géométrique) permet alors de conclure que cette série diverge.
On peut aussi remarquer que son terme général ne tend pas vers zéro avec la formule de Moivre-Stirling : $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.

2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right)$ est à termes > 0 car $2+n^2 > 1+n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par développement asymptotique pour $n \to +\infty$ (développement limité pour $x = 1/n^2$ au voisinage de 0), on a pour $n \geq 1$

$$\frac{2+n^2}{1+n^2} = \frac{1+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right) = 1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

et par suite, comme $\ln(1+x) = x + o(x)$ pour x au voisinage de 0,

$$u_n = \ln\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Donc cette série converge par équivalence avec une série de Riemann convergente.

3. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est une série alternée car $a_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
De plus $a_n \to 0$ pour $n \to +\infty$. On étudie la monotonie de la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x \in [1, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq e \approx 2.72.$$

Ainsi, pour $n \geq 3$, la suite (a_n) est décroissante en tendant vers zéro. Il en résulte donc en appliquant le critère de convergence des séries alternées que la série $\sum_{n\geq 3}(-1)^n a_n$ converge ce qui entraine, en rajoutant les deux premiers termes, que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ converge également.
Cependant la série est semi-convergente car elle n'est pas absolument convergente. En effet, on a

$$|u_n| = \left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 3,$$

ce qui entraine que la série $\sum_{n\geq 1}|u_n|$ diverge par minoration avec la série harmonique divergente.

4. Les termes de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$ ne sont pas de signe constant. Par développement asymptotique pour $n \to +\infty$ (développement limité de $\sin x$ pour $x = 1/n$ au voisinage de 0), on a pour $n \geq 1$

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3}).$$

Il vient donc, en utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x + o(x)$ pour x au voisinage de 0,

$$u_n = \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = -\frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Ainsi on a $|u_n| \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^2}$, ce qui entraine que la série est absolument convergente (et donc convergente) par équivalence à l'infini avec une série de Riemann qui converge.

Exercice 2 – Calcul de la somme d'une série

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}$.

1. Quelle est sa nature ? (Justifier)
2. Décomposer le terme général en éléments simples en fonction de $\dfrac{1}{(n-1)^2}$ et $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. En déduire la somme de cette série.

– Corrigé –

1. C'est une série à termes positifs et, par développement asymptotique pour $n \to +\infty$, son terme général s'écrit (pour $n \geq 2$):

$$u_n = \frac{n}{(n^2-1)^2} = \frac{n}{n^4\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

   Il en résulte que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge car de même nature que la série $\sum \frac{1}{n^3}$ (série de Riemann convergente).

2. On a pour tout $n \geq 2$ et a, b, c, d des réels:

$$u_n = \frac{n}{(n^2-1)^2} = \frac{n}{(n-1)^2(n+1)^2} = \frac{a\,n+b}{(n-1)^2} + \frac{c\,n+d}{(n+1)^2}.$$

   Il vient $a = c = 0$ et $b = -d = 1/4$ et donc:

$$u_n = \frac{n}{(n^2-1)^2} = \frac{1}{4(n-1)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2}.$$

3. On calcule la somme partielle S_N de la série pour N entier assez grand. Il vient à l'aide du changement d'indice $n = k+2$ dans la première sommation:

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{4(n-1)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2}\right) &= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{4(k+1)^2} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4N^2} - \frac{1}{4(N+1)^2}. \end{aligned}$$

   On trouve alors la somme de la série en prenant la limite de S_N pour $N \to +\infty$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

Exercice 3 – Comparaison entre série et intégrale généralisée

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive croissante.

1. On définit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(e^{-t})$ et $h :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $h(u) = \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)$.
   Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
2. On définit pour tout $n \geq 1$: $a_n = f(e^{-n})$ et $b_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

3. Retrouver un résultat du cours en appliquant le résultat de la question précédente à la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{|\ln x|^\alpha}$ pour $\alpha \geq 0$.

– **Corrigé** –

1. Les deux intégrales proposées sont généralisées uniquement en ce qu'elles ont pour borne supérieure d'intégration $+\infty$. Comme f est continue positive, soit les intégrales sont convergentes, soit elles divergent vers $+\infty$. Soit $A > 5$. On note

$$I(A) = \int_{\ln 2}^{A} g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad J(A) = \int_{2}^{A} h(u)\,\mathrm{d}u.$$

On veut étudier si $I(A)$ et $J(A)$ ont une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. Les changements de variable $x = e^{-t}$ dans la première intégrale et $y = \frac{1}{u}$ dans la deuxième donnent

$$I(A) = \int_{e^{-A}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(A) = \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Comme $e^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$, les deux intégrales convergent simultanément (et donc divergent aussi simultanément). On voit aussi que dans le cas où la limite existe, on a

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2}^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque : Ici, on n'a pas utilisé l'hypothèse de croissance de la fonction f, uniquement le fait qu'elle était intégrable sur tout intervalle du type $[\delta, \frac{1}{2}]$ avec $\delta > 0$ puisque continue sur ce compact.

2. Comme f est positive croissante sur $]0,1[$, g est positive décroissante sur $]0,+\infty[$. La comparaison série-intégrale permet donc de dire que $\sum g(n)$ et $\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. De même, h est positive décroissante sur $]1,+\infty[$ et donc $\sum h(n)$ et $\int_2^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. D'après la question précédente, les deux intégrales $\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_2^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, donc $\sum g(n)$ et $\sum h(n)$ sont de même nature. On a terminé de répondre à la question en remarquant que $g(n) = a_n$ et $h(n) = b_n$.

3. Remarquons que la fonction f proposée est bien continue positive croissante sur $]0,1[$. On voit facilement que $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. La question précédente permet de dire que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann qui converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Ceci nous montre que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.