Université Aix-Marseille

Parcours PEIP
groupes 1 et 4

Introduction à l'analyse

Interrogations orales

Voici la liste (classée chronologiquement) des intégrales qui ont été données en interrogations orales du 22 novembre au 4 décembre 2012, avec quelques réponses (au début) et des éléments pour trouver ces réponses.

1. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{8}\Big((x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+1}+\operatorname{argsh}\big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\big)\Big)+c$;
   on pose $\operatorname{sh} y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$.
2. $\displaystyle\int \frac{1+2x}{2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(2x^2+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+c$;
   on décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+5}}\,dt = \operatorname{argsh}\big(\frac{t+1}{2}\big)+c$;
   on a écrit : $t^2+2t+5 = 4\Big(\big(\frac{t+1}{2}\big)^2+1\Big)$.
4. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}+1}{2e^{2t}+e^{-t}+1}\,dt$;
   on pose $x=e^t$ et on décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples.
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t-1}+\sqrt{t+1}}\,dt$;
   on multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{t-1}-\sqrt{t+1}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient alors une somme d'intégrales dans lesquelles on fait le changement de variable $y=\sqrt{t-1}$ ou $y=\sqrt{t+1}$.
6. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt$;
   on fait apparaître la dérivée de $u: t\mapsto t^2+2t+2$ au numérateur ($t=\frac{1}{2}(2t+2)-1$) : le terme en $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ s'intègre en $\sqrt{u}$ et dans l'autre intégrale, on fait le changement de variable $t+1=\operatorname{sh} y$.
7. $\displaystyle\int \frac{e^{3t}-2e^t}{e^t+2}\,dt$; on pose $x=e^t$.
8. $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2t}}\,dt$;
   cette intégrale n'est définie que sur des intervalles de $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, on fait alors le changement de variable $t+1=\operatorname{ch} x$ si $t>0$ et $t+1=-\operatorname{ch} x$ si $t<-2$.
9. $\displaystyle\int \frac{3t^2+2}{(t^2+4)(t-1)}\,dt$;
   on décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples : le terme en $\frac{1}{t-1}$ s'intègre en $\ln|t-1|$, pour le terme en $\frac{at+b}{t^2+4}$, on fait apparaître la dérivée de $t\mapsto t^2+4$ pour n'avoir ensuite qu'une constante au numérateur, puis pour le terme $\frac{b}{t^2+4}$, on pose $x=\frac{t}{2}$ pour reconnaître un arctan.

10. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x \sin x}{\cos^3 x + \cos x - 2}\, dx$;

on pose $y = \cos x$, puis on décompose en éléments simples la fraction rationnelle obtenue : $\frac{y^2}{y^3+y-2} = \frac{1}{4(y-1)} + \frac{\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}}{y^2+y+2}$, puis on procède comme dans les intégrales précédentes.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^3}\, dt$;

on procède comme dans le cours : on intègre d'abord $I = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt$ par parties pour faire apparaître $J = \int \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt$, puis on intègre J par parties pour faire apparaître l'intégrale cherchée.

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{t}\, dt$;

on pose $y = \sqrt{1-t}$ et on doit alors intégrer la fraction rationnelle $y \mapsto \frac{2y^2}{y^2-1}$ que l'on décompose en éléments simples (ici, la partie entière n'est pas nulle !) : $\frac{2y^2}{y^2-1} = 2 + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$.

13. $\displaystyle\int \frac{\tan t}{(2+\cos t)^2}\, dt$;

on pose $x = \cos t$ et on doit alors intégrer la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{-1}{x(x+2)^2}$ que l'on décompose en éléments simples.

14. $\displaystyle\int \frac{t}{1+\sqrt{t(t-1)}}\, dt$;

cette intégrale n'est définie que sur des intervalles de $]-\infty, 0[\cup]1+\infty[$, on fait alors le changement de variable $2t-1 = \mathrm{ch}\, x$ si $t > 1$ et $2t-1 = -\mathrm{ch}\, x$ si $t < 0$ ($x \geq 0$ dans les deux cas) : on doit intégrer $\frac{1\pm\mathrm{ch}\, x}{2+\mathrm{sh}\, x}$, ce qui est possible en posant $y = e^x$ (on arrive finalement à une fraction rationnelle qu'il faut intégrer).

15. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+2t+2}}\, dt = \sqrt{t^2+2t+1} - \operatorname{argsh}(t+1) + c$;

on fait le changement de variable $\mathrm{sh}\, x = t+1$, et il reste à intégrer $x \mapsto \mathrm{sh}\, x - 1$.

16. $\displaystyle\int \cos x \cdot \operatorname{argth}(\sqrt{2}\sin x)\, dx$;

on pose $t = \sqrt{2}\sin x$, et on intègre l'argument tangente hyperbolique par parties.

17. $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{2x^2-4x+3}\, dx$;

cette fraction rationnelle à intégrer a une partie entière non nulle et le dénominateur n'a pas de racine réelle : on a $\frac{x^3+x}{2x^2-4x+3} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\frac{9}{2}x-3}{2x^2-4x+3}$; on remarque ensuite que $\frac{9}{2}x - 3 = \frac{9}{8}(4x-4) + \frac{3}{2}$ où $x \mapsto 4x-4$ est la dérivée de $x \mapsto 2x^2-4x+3$, puis que $2x^2-4x+3 = (\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{5}{2}$, ce qui suggère le changement de variable $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x-1)$ afin de reconnaître une primitive sous forme d'arctangente.

18. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx$;

c'est la même que 11.

19. $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3t+2}}\, dt$;

cette intégrale n'est définie que sur des intervalles de $]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$: on fait le changement de variable $2t+3 = \mathrm{ch}\, x$ si $t > -1$ et $2t+3 = -\mathrm{ch}\, x$ si $t < -2$ (dans les deux cas, on choisit de prendre $x \geq 0$), et on obtient l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{4}(\pm\mathrm{ch}\, x - 3)^2$ à calculer, ce qui se fait facilement en linéarisant $\mathrm{ch}^2 x$ ou en passant en exponentielle.

20. $\displaystyle\int \frac{1+2x}{(x-1)(2x^2+1)}\,dx$;

on décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples : $\frac{1+2x}{(x-1)(2x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{2x^2+1}$, le premier terme s'intègre en $\ln|x-1|$, le deuxième terme en $\frac{1}{2}\ln(2x^2+1)$.

21. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}+1}{2e^t+e^{-t}+1}\,dt$;

en posant $x = e^t$, l'intégrale à calculer revient à intégrer la fraction rationnelle $\frac{x^2+1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{5}{8}\frac{1}{2x^2+x+1}$: on remarque que, dans le deuxième terme, $x \mapsto 4x+1$ est la dérivée de $x \mapsto 2x^2+x+1$, et dans le dernier terme, on fait le changement de variable $y = \frac{1}{\sqrt{7}}(4x+1)$ afin d'obtenir une primitive sous forme d'arctangente.

22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt$;

on fait le changement de variable $t+1 = \operatorname{sh} x$.

23. $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin^3 x}{(\sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2})^3}\,dx$;

en posant $y = \cos x$, l'intégrale à calculer revient à intégrer $\frac{y(y^2-1)}{\sqrt{y^2+2y+2}}$; on pose ensuite $y+1 = \operatorname{sh} t$ et on doit finalement intégrer $(\operatorname{sh} t - 1)\big((\operatorname{sh} t-1)^2-1\big)$.

24. $\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{(\sqrt{e^t+2e^{-t}+2})^5}\,dt$;

en faisant le changement de variable $x = e^t$, cela revient à calculer l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}^5}$, ce qui se fait facilement en posant $x+1 = \operatorname{sh} y$: une primitive de $y \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^4 y}$ est $y \mapsto \operatorname{th} y - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 y + c$ (cela a été vu en TD : il suffit de voir que $y \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} = 1 - \operatorname{th}^2 y$ est la dérivée de $y \mapsto \operatorname{th} y$) ; on pourra aussi remarquer que $\operatorname{th} y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

25. $\displaystyle\int \frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\,dt$;

en multipliant par la quantité conjuguée $t - \sqrt{t^2+1}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient $\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}} = -t + \sqrt{t^2+1}$, ce qui s'intègre en $-\frac{1}{2}t^2$ pour le premier terme de la somme et on peut faire le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$ dans le deuxième terme : $\int \sqrt{t^2+1}\,dt = \int \operatorname{ch}^2 x\,dx$.

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}}\,dt$;

on multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}$ au numérateur et au dénominateur, et on obtient $\frac{1}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1+t}}{2t} - \frac{\sqrt{1-t}}{2t}$, chacun de ces deux termes s'intègrent comme l'intégrale 12 plus haut.

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(\sqrt{t^2+2t+2})^3}\,dt$;

on fait le changement de variable $t+1 = \operatorname{sh} x$ et on doit alors intégrer $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, ce qui donne $\operatorname{th} x + c$ (voir intégrale 24 plus haut), et on pourra remarquer que $\operatorname{th} x = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}$.

28. $\displaystyle\int \frac{1}{t+\sqrt{t^2+4}}\,dt$;

cette intégrale est la même que l'intégrale 25 plus haut après avoir fait le changement de variable $u = \frac{t}{2}$.

29. $\displaystyle\int \frac{16}{t^2(t^2+2)^2}\,dt$;

il faut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle à intégrer : $\frac{4}{u(u+2)^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+2} - \frac{2}{(u+2)^2}$; en remplaçant u par t^2, le premier terme s'intègre en $-\frac{1}{t}+c$, le deuxième terme s'intègre en arctangente après avoir posé $x=\sqrt{2}t$ et avec ce même changement de variable, le dernier terme est de la forme $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ qui se calcule comme dans la question 11 plus haut (c'est le terme J).

30. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+2)(t^2+2t+5)}\,dt$;

on décompose cette fraction rationnelle en éléments simples : $\frac{1}{(t+2)(t^2+2t+5)} = \frac{\frac{1}{5}}{t+2} - \frac{\frac{1}{5}t}{t^2+2t+5}$, le premier terme s'intègre en $\frac{1}{5}\ln|t+2|+c$, et dans le deuxième terme, on remarque que $\frac{1}{5}t = \frac{1}{10}(2t+2) - \frac{1}{5}$ et $t\mapsto 2t+2$ est la dérivée de $t\mapsto t^2+2t+5$: on obtient alors un terme en $\ln(t^2+2t+5)$ et il reste à intégrer $\frac{\frac{1}{5}}{t^2+2t+5}$, ce qui se fait en posant $2x=t+1$.

31. $\displaystyle\int \frac{1}{t+\sqrt{t^2+9}}\,dt$;

en posant $x=\frac{t}{3}$, on retombe sur l'intégrale 25 plus haut.

32. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x+\sin 2x}\,dx$;

en faisant le changement de variable $t=\cos x$, cela revient à intégrer $t\mapsto -\frac{1}{2t+1}$.

33. $\displaystyle\int \frac{1}{(\sqrt{t^2+2t+10})^3}\,dt$;

en faisant le changement de variable $3\operatorname{sh}x = t+1$, on retombe sur une intégrale déjà traitée à la question 27 plus haut.

34. $\displaystyle\int \frac{5t-3}{\sqrt{2t^2+8t+1}}\,dt$;

cette intégrale n'existe que sur des intervalles contenus dans $]-\infty,-2-\sqrt{\frac{7}{2}}[\cup]-2+\sqrt{\frac{7}{2}},+\infty[$ (là où l'expression sous la racine carrée est positive) ; dans un premier temps, on écrit $5t-3 = \frac{5}{4}(4t+8)-13$ afin de faire apparaître $t\mapsto 4t+8$ qui est la dérivée de $t\mapsto 2t^2+8t+1$: le terme en $\frac{5}{2}\,\frac{4t+8}{2\sqrt{2t^2+8t+1}}$ est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t)=2t^2+8t+1$, ce qui donne, après avoir intégré, un terme de la forme $\frac{5}{2}\sqrt{2t^2+8t+1}+c$; pour le terme $\frac{13}{\sqrt{2t^2+8t+1}}$, on fait le changement de variable $\sqrt{\frac{7}{2}}\operatorname{ch}x = t+2$ si $t>-2+\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{7}{2}}\operatorname{ch}x = t+2$ si $t<-2-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

35. $\displaystyle\int (\sqrt{2t^2+8t+1})^3\,dt$;

comme pour l'intégrale précédente, cette intégrale n'existe que sur des intervalles contenus dans $]-\infty,-2-\sqrt{\frac{7}{2}}[\cup]-2+\sqrt{\frac{7}{2}},+\infty[$ (là où l'expression sous la racine carrée est positive) ; on fait ici le même changement de variable que dans l'intégrale précédente : $\sqrt{\frac{7}{2}}\operatorname{ch}x = t+2$ si $t>-2+\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{7}{2}}\operatorname{ch}x = t+2$ si $t<-2-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

36. $\displaystyle\int (5t-3)\sqrt{2t^2+8t+1}\,dt$;

même chose pour cette intégrale que dans les deux intégrales précédentes (en particulier, même domaine de définition) : on fait apparaître la dérivée de $t\mapsto 2t^2+8t+1$ dans le terme $5t-3$, et on obtient un terme du type $u'\sqrt{u}$ qui s'intègre en $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$, puis dans le terme qui reste, on fait le changement de variable : $\sqrt{\frac{7}{2}}\operatorname{ch}x = t+2$ si $t > -2+\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{7}{2}}\operatorname{ch}x = t+2$ si $t < -2-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

37. $\displaystyle\int \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}\,dt$;

il faut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle à intégrer : $\frac{1}{t^2(t^2-1)^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{3/4}{t-1} + \frac{1/4}{(t-1)^2} + \frac{3/4}{t+1} + \frac{1/4}{(t+1)^2}$ (on pourra remarquer que la fraction rationnelle est paire, ce qui permet de réduire le nombre de coefficients à identifier) ; le premier terme s'intègre en $-\frac{1}{t}$, le deuxième en $-\frac{3}{4}\ln|t-1|$, le troisième en $-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}$, le quatrième en $\frac{3}{4}\,ln|t+1|$ et le dernier en $-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}$: ne pas oublier la constante dans le résultat final !

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4t^2-1}}{\sqrt{2t+1}+2\sqrt{2t-1}}\,dt$;

cette intégrale n'existe que sur des intervalles contenus dans $[\frac{1}{2},+\infty[$ (on veut que toutes les expressions sous les racines carrées soient positives) ; on multiplie la fonction à intégrer par la quantité conjuguée du dénominateur $\sqrt{2t+1}-2\sqrt{2t-1}$ (lorsqu'il ne s'annule pas, c'est-à-dire si $t \neq \frac{5}{6}$) au numérateur et au dénominateur, et on obtient $\frac{\sqrt{4t^2-1}}{\sqrt{2t+1}+2\sqrt{2t-1}} = \frac{2(2t-1)\sqrt{2t+1}}{6t-5} - \frac{(2t+1)\sqrt{2t-1}}{6t-5}$: dans le premier terme, on fait le changement de variable $y^2 = 2t+1$ et dans le deuxième terme, on fait le changement de variable $y^2 = 2t-1$, ce qui nous amène à intégrer $y \mapsto \frac{2(y^2-2)y^2}{3y^2-8}$ et $y \mapsto \frac{y^2(y^2+2)}{3y^2-2}$ qui sont toutes deux des fractions rationnelles (à parties entières non nulles).

39. $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-2t}}\,dt$;

cette intégrale n'existe que sur des intervalles contenus dans $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$: on fait le changement de variable $\operatorname{ch}x = t-1$ si $t > 2$ et $-\operatorname{ch}x = t-1$ si $t < 0$ (dans les deux cas, on choisit $x > 0$) ; il nous faut alors intégrer $x \mapsto (\pm\operatorname{ch}x+1)^2 = \operatorname{ch}^2x \pm 2\operatorname{ch}x+1$.

40. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}+(1+t)^{\frac{1}{3}}}\,dt$;

cette intégrale n'existe que sur des intervalles contenus dans $]-1,+\infty[$: on fait le changement de variable $y^6 = 1+t$, qui transforme alors l'intégrale en le calcul d'une primitive de la fraction rationnelle $y \mapsto \frac{6y^3}{y+1} = 6\big(y^2-y+1-\frac{1}{y+1}\big)$.

41. $\displaystyle\int \frac{t^6+1}{(t-1)(t^2+t+1)}\,dt$;

cette fraction rationnelle s'écrit : $\frac{t^6+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = t^3+1+\frac{2/3}{t-1} - \frac{2}{3}\frac{t+2}{t^2+t+1}$; le terme t^3+1 est un polynôme qui s'intègre en $\frac{1}{4}t^4+t+c$, le terme $\frac{2/3}{t-1}$ s'intègre en $\frac{2}{3}\ln|t-1|$ et dans le dernier terme, on fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur : $\frac{2}{3}\frac{t+2}{t^2+t+1} = \frac{1}{3}\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2+t+1}$, le premier terme de cette somme s'intégrant en $\frac{1}{3}\ln(t^2+t+2)$ et dans le deuxième terme de la somme on fait le changement de variable $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)$, et on obtient un terme en $\arctan y$.

42. $\displaystyle\int \frac{1}{5t+\sqrt{4t^2+1}}\,dt$;

cette intégrale est bien définie si le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire si $t \neq -\frac{1}{\sqrt{21}}$; on multiplie par la quantité conjuguée $5t-\sqrt{4t^2+1}$ au numérateur et au dénominateur à condition que celle-ci ne s'annule pas (c'est-à-dire si $t \neq \frac{1}{\sqrt{21}}$), et on obtient : $\frac{1}{5t+\sqrt{4t^2+1}} = \frac{5t}{21t^2-1} - \frac{\sqrt{4t^2+1}}{21t^2-1}$, le premier terme s'intègre en $\frac{5}{42}\ln|21t^2-1|+c$, et on fait le changement de variable $2t = \operatorname{sh} x$ dans le deuxième terme, ce qui nous fait intégrer un terme du type $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\alpha \operatorname{sh}^2 x + \beta}$, ce qui se fait bien en posant $y = e^x$ (on arrive alors à une fraction rationnelle).

43. $\displaystyle\int \frac{1+\cos 2x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}\, dx$;

cette intégrale est bien définie sur les intervalles pour lesquels $1-\tan^2 x > 0$, c'est-à-dire sur les intervalles de $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+(k+1)\pi[$; on a pour x dans un tel intervalle $\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1+\cos 2x}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \frac{2\cos x(1-\sin^2 x)}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}$ (car $\cos x > 0$) et on fait le changement de variable $\sin y = \sqrt{2}\sin x$ (possible car $|\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et dans ce cas, on choisit $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce qui implique que $\cos y > 0$), ce qui nous donne alors à intégrer $y \mapsto \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 y$.

44. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}}\, dx$;

voir l'intégrale $\mathrm{n}^0 40$!

45. $\displaystyle\int \frac{1}{2\cosh x + \sinh x + 1}\, dx$;

en faisant le changement de variable $y = e^x$, on obtient la fraction rationnelle $y \mapsto \frac{2}{3y^2+2y+1} = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(3y+1)\right)^2+1}$ à intégrer, et on obtient un terme en $\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(3y+1)\right)$.

46. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$;

en faisant le changement de variable $\operatorname{sh} y = x+1$, l'intégrale à calculer revient à déterminer une primitive de $y \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y(\operatorname{sh} y - 1)^2}$, qui peut se calculer en faisant le changement de variable $t = e^y$: on obtient alors une fraction rationnelle en t à intégrer.

47. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^{\frac{5}{2}}}\, dx$;

le même changement de variable $\operatorname{sh} y = x+1$ que pour l'intégrale précédente nous donne à intégrer $y \mapsto \frac{(\operatorname{sh} y-1)^2}{\operatorname{ch}^4 y}$ qui, comme plus haut, peut se calculer en posant $t = e^y$ puisqu'on obtient une fraction rationnelle en t à intégrer.

48. $\displaystyle\int x^2(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}\, dx$;

le même changement de variable $\operatorname{sh} y = x+1$ que pour les deux intégrales précédentes nous donne à intégrer $y \mapsto (\operatorname{sh} y - 1)^2 \operatorname{ch}^4 y$ qui, en posant $t = e^y$, revient à intégrer un polynôme en t divisé par une puissance de t.

49. $\displaystyle\int \frac{x^2 \ln x}{(x^3+1)^3}\, dx$;

on intègre par partie une première fois en posant $u'(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^3}$ et $v(x) = \ln x$, et donc $u(x) = -\frac{1}{6}\frac{1}{(x^3+1)^2}$ (u' est de la forme $\frac{f'}{f^3}$ qui s'intègre en $-\frac{1}{2f^2}$) et $v'(x) = \frac{1}{x}$; il reste alors à intégrer le terme $x \mapsto u(x)v'(x) = \frac{1}{6x(x^3+1)^2} = \frac{x^2}{x^3(x^3+1)^2}$ dans lequel on fait le changement de variable $y = x^3$, et il nous faut alors intégrer $\mapsto \frac{1}{18}\frac{1}{y(y+1)^2}$ qui est une fraction rationnelle que l'on décompose en éléments simples.

50. $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}}\, dt$;

cette intégrale est bien définie sur les intervalles contenus dans $[-1,1]$; on multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée (voir aussi l'intégrale 26 plus haut), et on a alors

$\frac{t^2}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t} - \frac{1}{2}t\sqrt{1+t}$: on fait le changement de variable $y^2 = 1+t$ dans le premier terme et $y^2 = 1-t$ dans le deuxième, ce qui nous amène à intégrer des polynômes en y.

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

pour intégrer cette fraction rationnelle, on factorise le dénominateur : $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$, et compte tenu de la parité de la fraction rationnelle, la décomposition en éléments simples est de la forme $\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{-ax+b}{x^2-x+1}$; pour déterminer a et b, on peut évaluer l'égalité en $x=0$, ce qui donne $b = \frac{1}{2}$, puis en $x=1$, ce qui donne $a = -\frac{3}{2}$.