Introduction à l'analyse

Correction du DM1

Sujet 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arctan\Big(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\Big).$$

Comme la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f est déterminé par l'ensemble des points x pour lesquels $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ est bien défini. On sait que cos prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, donc $1+\cos x \geq 0$ et $1-\cos x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a

$$D_f = \big\{x \in \mathbb{R}; 1-\cos x \neq 0\big\} = \mathbb{R} \setminus \big\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

De plus, on sait que la fonction arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction cos est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fraction rationnelle $\varphi : t \mapsto \frac{1+t}{1-t}$ est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, elle est positive sur $[-1,1[$, strictement positive sur $]-1,1[$. Par composition de fonctions, on obtient donc le diagramme suivant pour f :

$$\begin{array}{ccccccccc}
D_f & \xrightarrow{\cos} & [-1,1[& \xrightarrow{\varphi} & [0,+\infty[& \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} & [0+\infty[& \xrightarrow{\arctan} & [0,\frac{\pi}{2}[\\
x & \longmapsto & \cos x & \longmapsto & \frac{1+\cos x}{1-\cos x} & \longmapsto & \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} & \longmapsto & \arctan\big(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\big) \\
D_{f'} & \xrightarrow[\cos]{} &]-1,1[& \xrightarrow[\varphi]{} &]0,+\infty[& \xrightarrow[\sqrt{\cdot}]{} &]0+\infty[& \xrightarrow[\arctan]{} &]0,\frac{\pi}{2}[
\end{array}$$

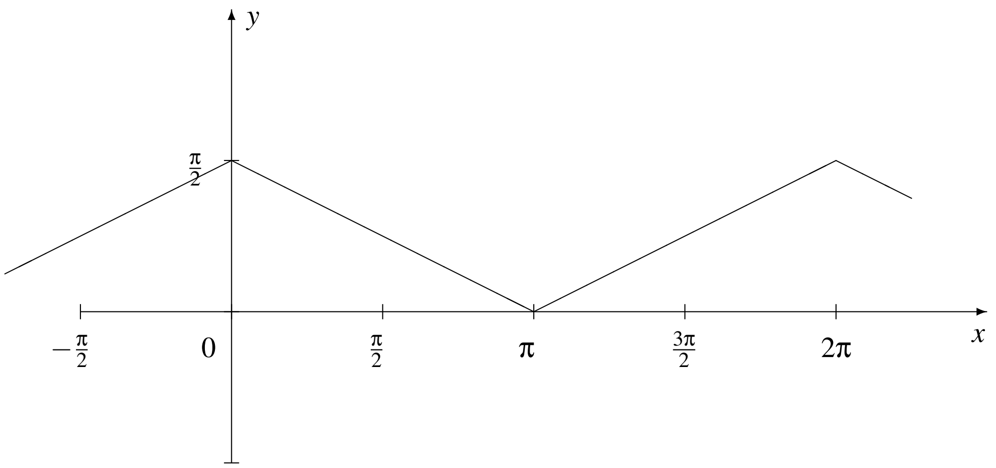
La fonction f est donc continue sur son ensemble de définition et dérivable sur

$$D_{f'} = \big\{x \in D_f; 1+\cos x \neq 0\big\} = \mathbb{R} \setminus \big\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Pour tout $x \in D_{f'}$, la dérivée de f au point x vaut :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\big(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\big)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}} \cdot \frac{2}{(1-\cos x)^2} \cdot (-\sin x) \\
&= \frac{1-\cos x}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos x}}{2\sqrt{1+\cos x}} \cdot \frac{2}{(1-\cos x)^2} \cdot (-\sin x) \\
&= \frac{-\sin x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{2|\sin x|}.
\end{aligned}$$

De plus, la fonction f est $2\pi-$périodique ($f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et paire ($f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) : cela provient de la $2\pi-$périodicité et de la parité de cos. Ainsi, on peut limiter l'étude de f à l'intervalle $]0,\pi]$. Sur $]0,\pi[$, $f'(x) = -\frac{1}{2}$; on en déduit donc que f est linéaire de pente $-\frac{1}{2}$ sur $]0,\pi[$, $f(\pi) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}$ car $\arctan t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$. En prolongeant f par parité sur $[-\pi,0[$, puis par $2\pi-$périodicité sur D_f, on obtient le graphe suivant :



Sujet 2

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \arctan\Big(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\Big).$$
Comme la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de g est déterminé par l'ensemble des points x pour lesquels $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ est bien défini. On sait que sin prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, donc $1+\sin x \geq 0$ et $1-\sin x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a
$$D_g = \big\{x \in \mathbb{R}; 1+\sin x \neq 0\big\} = \mathbb{R} \setminus \big\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\}.$$
De plus, on sait que la fonction arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fraction rationnelle $\psi : t \mapsto \frac{1-t}{1+t}$ est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, elle est positive sur $]-1,1]$, strictement positive sur $]-1,1[$. Par composition de fonctions, on obtient donc le diagramme suivant pour g :

$$\begin{array}{ccccccccc}
D_g & \xrightarrow{\sin} &]-1,1] & \xrightarrow{\psi} & [0,+\infty[& \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} & [0+\infty[& \xrightarrow{\arctan} & [0,\frac{\pi}{2}[\\
x & \longmapsto & \sin x & \longmapsto & \frac{1-\sin x}{1+\sin x} & \longmapsto & \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} & \longmapsto & \arctan\big(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\big) \\
D_g & \xrightarrow[\sin]{} &]-1,1[& \xrightarrow[\psi]{} &]0,+\infty[& \xrightarrow[\sqrt{\cdot}]{} &]0+\infty[& \xrightarrow[\arctan]{} &]0,\frac{\pi}{2}[
\end{array}$$

La fonction g est donc continue sur son ensemble de définition et dérivable sur
$$D_{g'} = \big\{x \in D_g; 1-\sin x \neq 0\big\} = \mathbb{R} \setminus \big\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\} = \mathbb{R} \setminus \big\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\}$$
Pour tout $x \in D_{g'}$, la dérivée de g au point x vaut :
$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1+\Big(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\Big)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{-2}{(1+\sin x)^2} \cdot \cos x \\
&= \frac{1+\sin x}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1-\sin x}} \cdot \frac{-2}{(1+\sin x)^2} \cdot \cos x \\
&= \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{-\cos x}{2|\cos x|}.
\end{aligned}$$

De plus, la fonction g est 2π−périodique ($g(x+2\pi) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) : cela provient de la 2π−périodicité. Ainsi, on peut limiter l'étude de g à un ensemble de longueur 2π : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g'(x) = -\frac{1}{2}$ (car $\cos x \geq 0$); on en déduit donc que g est linéaire de pente $-\frac{1}{2}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $g'(x) = \frac{1}{2}$ (car $\cos x \leq 0$) ; on en déduit donc que g est linéaire de pente $\frac{1}{2}$ sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. De plus, $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $g(x) \xrightarrow[x \to -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}]{} \frac{\pi}{2}$ car $\arctan t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$. En prolongeant g par 2π−périodicité sur D_g, on obtient le graphe suivant :