Introduction à l'analyse

Corrigé du devoir maison n°1

Énoncé

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \operatorname{argsh}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}} - x.$$

1. Rappeler l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction $t \mapsto \operatorname{argsh} t$ ainsi que l'expression de sa dérivée.

2. Montrer que $x \mapsto \operatorname{ch}2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de sa dérivée.

3. Donner l'ensemble de définition de la fonction g dont l'expression est donnée par

$$g(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}}.$$

   Quel est son domaine de dérivabilité ? Donner l'expression de g' là où elle existe.

4. Donner l'ensemble de définition de f et calculer sa dérivée f' là où elle existe (domaine que l'on précisera).

5. En déduire une expression simplifiée de f et tracer son graphe $y = f(x)$.

Rappel : La dérivée d'une fonction composée $f = h \circ g : I \to \mathbb{R}$ pour $g : I \to J$ et $h : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables est donnée par $f' = g' \cdot h' \circ g$. Ici, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Indication : On essayera d'écrire les fonctions considérées dans le problème comme des composées de fonctions élémentaires à déterminer (n'oubliez pas de préciser les ensembles de définition).

Corrigé

1. La fonction argument sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$, elle y est continue et dérivable. Sa dérivée est donnée par

$$(\operatorname{argsh})'t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}2x$ est la composée de la fonction $x \mapsto 2x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction cosinus hyperbolique, elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $x \mapsto \operatorname{ch}2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2\operatorname{sh}2x$

3. On sait que sur $\mathbb{R}$, la fonction cosinus hyperbolique prend des valeurs supérieures ou égales à 1, ce qui implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x - 1)$ est toujours positive (ou nulle) ; sa racine carrée est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$.

   La fonction g est la composée des deux fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x-1)$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est donnée par $x \mapsto \operatorname{sh}2x$, $x \in \mathbb{R}$) et de la fonction "racine carrée" dérivable sur $]0,+\infty[$ (sa dérivée est donnée par $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $t > 0$). De plus, $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) > 0$ si et seulement si $x \neq 0$, ce qui donne $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme domaine de dérivabilité de g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, on a alors

$$\begin{array}{rclcl}
g'(x) & = & \operatorname{sh} 2x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}}} = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}} & & \text{car } \operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{sh}^2 x + 1 \\
& = & \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{|\operatorname{sh} x|} & & \text{car } \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\
& = & \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -\operatorname{ch} x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} & & \text{car } \dfrac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}
\end{array}$$

4. Comme la fonction argument sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f est le même que celui de g, c'est-à-dire $\mathbb{R}$. En effet, f est la somme de la fonction $x \mapsto -x$ définie sur $\mathbb{R}$ et de la composée de argsh et g. On en déduit de même que le domaine de dérivabilité de f est le même que celui de g, c'est-à-dire $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a pour tout $x \neq 0$

$$f'(x) = g'(x) \cdot (\operatorname{argsh})'(g(x)) - 1 = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 - 1 = -2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

car

$$(\operatorname{argsh})'(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

En effet, $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout x, et on a utilisé la formule pour $\operatorname{ch} 2x$ déjà utilisée dans la question précédente.

5. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$, on en déduit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $f(x) = 0$ si $x > 0$, $f(x) = -2x$ si $x < 0$ et $f(0) = 0$.