

Introduction à l'analyse

Devoir maison n°2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} vérifiant les relations

$$(E) \quad \begin{cases} f' = 3f - 4g, \\ g' = f - g \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Le but de ce problème est de trouver toutes les fonctions f et g vérifiant (E) .

1. Supposons que deux fonctions f et g dérivables sur \mathbb{R} vérifient (E) . On définit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$f = 2v \quad \text{et} \quad g = u + v.$$

- (i) Dire pourquoi u et v sont dérivables sur \mathbb{R} .
 - (ii) Déterminer l'équation différentielle (homogène) vérifiée par u .
 - (iii) Donner la forme de toutes les solutions de l'équation différentielle trouvée au (ii).
 - (iv) Déterminer l'équation différentielle (avec second membre) vérifiée par v et la résoudre.
 - (v) En déduire la forme de f et g .
2. Inversement, montrer que toutes les fonctions f et g trouvées au 1.(v) sont dérivables sur \mathbb{R} et vérifient (E) .
3. Conclusion ?