Introduction à l'analyse

Devoir maison n°2

à rendre le lundi 4 novembre 2013

Le but de ce problème est de montrer que $e = \exp(1)$ est irrationnel (on sait a priori que $2 \leq e \leq 3$). On pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{3}{n+1}.$$
On pourra utiliser un encadrement de e^{1-x} pour $x \in [0,1]$.
3. Montrer en utilisant une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$
4. Pour $n \geq 1$, on pose $k_n = n!e - I_n$. Trouver une relation entre k_{n+1} et k_n en utilisant la question précédente (on pourra aussi utiliser le fait que $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$).
5. Calculer k_1 et en déduire par récurrence que k_n est un entier pour tout $n \geq 1$.
6. On suppose à partir de maintenant que e est rationnel et s'écrit $\frac{p}{q}$ avec p et q ($q \geq 1$) des entiers.
   (a) Montrer que, sous l'hypothèse que l'on a faite, $q!e$ est un entier. En déduire que $n!e$ est un entier pour tout $n \geq q$.
   (b) En utilisant la relation entre k_n et I_n, en déduire que I_n est un entier pour tout $n \geq q$.
   (c) Montrer que cela est en contradiction avec l'inégalité montrée dans la question 2.
   (d) Que peut-on en déduire ?

Rappel : L'application factorielle qui va de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \text{factorielle} & : & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & & n \longmapsto \text{factorielle}(n) = n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases} \end{array}$$

En particulier, l'application factorielle prend les valeurs suivantes :

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 7040.$$