Université Aix-Marseille Parcours PEIP

Introduction à l'analyse

Devoir maison n^{o}2

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} f' & = & 3f - 4g, \\ g' & = & f - g \end{array} \right. \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Le but de ce problème est de trouver toutes les fonctions f et g vérifiant (E).

1. Supposons que deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifient (E). On définit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient
$$f = 2v \quad \text{et} \quad g = u + v.$$
   - (i) Dire pourquoi u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   - (ii) Déterminer l'équation différentielle (homogène) vérifiée par u.
   - (iii) Donner la forme de toutes les solutions de l'équation différentielle trouvée au (ii).
   - (iv) Déterminer l'équation différentielle (avec second membre) vérifiée par v et la résoudre.
   - (v) En déduire la forme de f et g.
2. Inversement, montrer que toutes les fonctions f et g trouvées au $1.(v)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient (E).
3. Conclusion ?

Corrigé

1. (i) Compte tenu des relations vérifiées par u et v en fonction de f et g, on montre facilement que $v = \frac{1}{2} f$ et $u - g - \frac{1}{2} f$. Ainsi, u et v sont des combinaisons linéaires de f et g dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sont elles aussi dérivables sur $\mathbb{R}$.

   (ii) La première équation de (E) en remplaçant f et g par leurs expressions en fonction de u et v implique $v' = v - 2u$. La deuxième équation de (E) en remplaçant f et g par leurs expressions en fonction de u et v implique $u' + v' = v - u$. En soustrayant la première équation $v' = v - 2u$ à cette deuxième équation $u' + v' = v - u$, on obtient
$$u' = u \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

   (iii) On sait, d'après le cours, que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est de la forme $y(t) = \lambda e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, avec λ une constante. Ceci donne dans notre cas
$$u(t) = \lambda e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

(iv) En remplaçant u dans la première équation trouvée au (ii) ($v' = v - 2u$) par sa forme générale trouvée au (iii), on obtient

$$(\mathcal{E}) \qquad v'(t) = v(t) - 2\lambda e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme "solution particulière + solution générale de l'équation homogène associée" (voir le cours). Dans notre cas, l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ est $y' = y$ dont les solutions sont de la forme $y(t) = \mu e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme $v(t) = \mu(t)\, e^t$, $t \in \mathbb{R}$, où $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On vérifie facilement, en remplaçant dans $(\mathcal{E})$, qu'alors μ doit vérifier $\mu'(t) = -2\lambda$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: une solution est $\mu(t) = -2\lambda t$. Ainsi, la solution générale de $(\mathcal{E})$ est de la forme

$$v(t) = -2\lambda t\, e^t + \mu e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

(v) En remplaçant u et v par leurs expressions trouvées ci-dessus, on obtient pour f et g les formes suivantes :

$$f(t) = (-4\lambda t + 2\mu)\, e^t, \quad g(t) = (-2\lambda t + \lambda + \mu)\, e^t, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

2. Les deux fonctions f et g déterminées au 1.(v) sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car produits d'un polynôme par une exponentielle. De plus, on a

$$f'(t) = (-4\lambda t + 2\mu - 4\lambda)\, e^t \quad \text{et} \quad g'(t) = (-2\lambda t - \lambda + \mu)\, e^t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Il est aussi facile de voir que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3f(t) - 4g(t) & = & (-4\lambda t + 2\mu - 4\lambda)\, e^t \\ f(t) - g(t) & = & (-2\lambda t - \lambda + \mu)\, e^t \end{array} \right. \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, on a montré que f et g données par (1) vérifient bien le système d'équations différentielles (E).

3. On en conclut que toutes les solutions dérivables (sur $\mathbb{R}$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du système (E) sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(t) & = & (-4\lambda t + 2\mu)\, e^t \\ g(t) & = & (-2\lambda t + \lambda + \mu)\, e^t \end{array} \right. \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales imposées sur f et g. Par exemple, en $t = 0$, on a : $f(0) = 2\mu$ et $g(0) = \lambda + \mu$, donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & g(0) - \frac{1}{2} f(0), \\ \mu & = & \frac{1}{2} f(0). \end{array} \right.$$