Introduction à l'analyse

Corrigé du devoir maison n^{o}2

Énoncé

Le but de ce problème est de montrer que $e = \exp(1)$ est irrationnel (on sait a priori que $2 \leq e \leq 3$). On pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{3}{n+1}.$$
On pourra utiliser un encadrement de e^{1-x} pour $x \in [0,1]$.

3. Montrer en utilisant une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

4. Pour $n \geq 1$, on pose $k_n = n!e - I_n$. Trouver une relation entre k_{n+1} et k_n en utilisant la question précédente (on pourra aussi utiliser le fait que $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$).

5. Calculer k_1 et en déduire par récurrence que k_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

6. On suppose à partir de maintenant que e est rationnel et s'écrit $\frac{p}{q}$ avec p et q ($q \geq 1$) des entiers.
   (a) Montrer que, sous l'hypothèse que l'on a faite, $q!e$ est un entier. En déduire que $n!e$ est un entier pour tout $n \geq q$.
   (b) En utilisant la relation entre k_n et I_n, en déduire que I_n est un entier pour tout $n \geq q$.
   (c) Montrer que cela est en contradiction avec l'inégalité montrée dans la question 2.
   (d) Que peut-on en déduire ?

Rappel : L'application factorielle qui va de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est définie par

$$\begin{array}{rccl} \text{factorielle} : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \text{factorielle}(n) = n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases} \end{array}$$

En particulier, l'application factorielle prend les valeurs suivantes :

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 7040.$$

Corrigé

1. On a
$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = e-1,$$
et en intégrant par parties, on obtient
$$I_1 = \int_0^1 x e^{1-x}\,dx = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx = -1+e-1 = e-2.$$

2. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 \leq e^{1-x} \leq e \leq 3$. Ce qui donne $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq 3x^n$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc
$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n\,dx \leq I_n \leq \int_0^1 3x^n\,dx = \frac{3}{n+1}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties en posant $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{1-x}$, ce qui donne $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -e^{1-x}$, on obtient
$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x}\,dx = -1+(n+1)I_n,$$
ce qui était demandé.

4. Pour $n \geq 1$, on a
$$\begin{array}{rcll} k_{n+1} & = & (n+1)!e - I_{n+1} & \text{par définition de } k_{n+1}, \\ & = & (n+1)!e - \big((n+1)I_n - 1\big) & \text{d'après la relation trouvée à la question 3,} \\ & = & (n+1)\big(n!e - I_n\big) + 1 & \text{en mettant } n+1 \text{ en facteur,} \\ & = & (n+1)k_n + 1 & \text{par définition de } k_n. \end{array}$$

5. On a $k_1 = 1!e - I_1 = e-(e-2) = 2$ d'après la valeur de I_1 trouvée à la question 1. Montrons maintenant par récurrence que k_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

   Soit $P(n)$ la propriété "$k_n \in \mathbb{N}$".

   Initialisation : $P(1)$ est vérifiée car $k_1 = 2 \in \mathbb{N}$.

   Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vérifiée. Alors on a d'après la relation trouvée à la question 4 : $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$. Comme k_n est un entier positif par hypothèse de récurrence et $n+1$ est aussi un entier positif, leur produit $(n+1)k_n$ est un entier positif. Si on ajoute 1 à cet entier positif, le résultat $(n+1)k_n + 1$ est lui aussi un entier positif, et donc k_{n+1} est un entier, ce qui montre que $P(n+1)$ est vérifiée.

   Conclusion : On a montré par récurrence que $k_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 1$.

6. On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ ($q \geq 1$) tels que $e = \frac{p}{q}$.

   (a) Si e s'écrit $\frac{p}{q}$, on a alors $q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n \geq q$, on a $n! = q!(q+1)(q+2)\ldots(n-1)n$, donc $n!e$ s'écrit comme le produit de $q!e$ et de l'entier $(q+1)(q+2)\ldots(n-1)n$; c'est donc un entier (comme produit de deux entiers).

   (b) Par définition de k_n, on a $I_n = n!e - k_n$. Comme pour tout $n \geq q$, $n!e$ et k_n sont des entiers, I_n est lui aussi un entier (comme différence de deux entiers).

   (c) Soit $n \geq q$ et $n \geq 3$. On vient de montrer que I_n est un entier. D'après la question 2, on sait aussi que $0 < I_n \leq \frac{3}{4}$. Ceci est impossible : il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et $\frac{3}{4}$.

   (d) On en déduit donc que l'hypothèse faite au début de cette question n'est pas vérifiée : e n'est pas rationnel.