Introduction à l'analyse

Devoir maison n°3

Le but de ce problème est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f(y) - f(x) = (y-x) f'\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\varphi'(0) = a \in \mathbb{R}$ et vérifiant

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

   (i) Montrer que nécessairement $\varphi(0) = 0$.

   (ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. En étudiant le taux de variations de φ au point x, montrer que $\varphi'(x) = a$.

   (iii) En déduire l'expression de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit maintenant $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\psi(0) = b \in \mathbb{R}$ et $\psi'(0) = a$ et vérifiant

$$\psi(x) + \psi(y) = 2\psi\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

   (i) On définit $\Phi(x) = \psi(x) - b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie aussi l'égalité (3).

   (ii) En remarquant que $\Phi(0) = 0$, montrer que $\Phi(x) = 2\Phi(\frac{x}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (iii) Montrer que Φ vérifie l'égalité (2).

   (iv) En déduire l'expression de $\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On considère maintenant une fonction f comme dans le début de l'énoncé.

   (i) Montrer que f est deux fois dérivable.

   (ii) Montrer que f' vérifie l'égalité (3).

   (iii) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pourra, dans un premier temps, admettre la question 3(i).