Introduction à l'analyse

Devoir maison n°3

Le but de ce problème est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\varphi'(0) = a \in \mathbb{R}$ et vérifiant

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

   (*i*) Montrer que nécessairement $\varphi(0) = 0$.

   (*ii*) Soit $x \in \mathbb{R}$. En étudiant le taux de variations de φ au point x, montrer que $\varphi'(x) = a$.

   (*iii*) En déduire l'expression de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit maintenant $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\psi(0) = b \in \mathbb{R}$ et $\psi'(0) = a$ et vérifiant

$$\psi(x) + \psi(y) = 2\psi\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

   (*i*) On définit $\Phi(x) = \psi(x) - b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie aussi l'égalité (3).

   (*ii*) En remarquant que $\Phi(0) = 0$, montrer que $\Phi(x) = 2\Phi(\frac{x}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (*iii*) Montrer que Φ vérifie l'égalité (2).

   (*iv*) En déduire l'expression de $\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On considère maintenant une fonction f comme dans le début de l'énoncé.

   (*i*) Montrer que f est deux fois dérivable.

   (*ii*) Montrer que f' vérifie l'égalité (3).

   (*iii*) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé

1. (*i*) En prenant $x = y = 0$ dans la relation (2), on obtient :

$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) = 2\varphi(0),$$

   ce qui implique alors $\varphi(0) = 0$.

   (*ii*) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, on a

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(x+h) - \varphi(x)\right) = \frac{1}{h}\varphi(h) = \frac{1}{h}\left(\varphi(h) - \varphi(0)\right)$$

   En effet, il suffit d'utiliser la relation (2) avec $y = h$ et d'utiliser le fait (prouvé plus haut) que $\varphi(0) = 0$. Par hypothèse, φ est dérivable en 0 ; on a donc

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(h) - \varphi(0)\right) \xrightarrow[h \to 0]{} \varphi'(0) = a.$$

   Ceci montre alors que φ est dérivable en x et que $\varphi'(x) = a$.

(iii) On vient de montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, φ est de la forme $\varphi(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, pour une constante $b \in \mathbb{R}$. Comme, par ailleurs, on sait que $\varphi(0) = 0$, on en déduit que nécessairement $b = 0$. Ainsi, φ est nécessairement de la forme

$$\varphi(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, une fonction de la forme plus haut satisfait la relation (2) (cela se vérifie facilement).

2. (i) La fonction Φ est définie comme la somme d'une constante $(-b)$ est d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (ψ). Ainsi, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi(x) + \Phi(y) &= (\psi(x) - b) + (\psi(y) - b) \;=\; \psi(x) + \psi(y) - 2b \\ &= 2\psi(\tfrac{x+y}{2}) - 2b \;=\; 2\big(\psi(\tfrac{x+y}{2}) - b\big) \\ &= 2\Phi(\tfrac{x+y}{2}).\end{aligned}$$

La première égalité provient de la définition de Φ, la deuxième égalité est obtenue par développement de l'expression précédente, la troisième égalité provient du fait que ψ vérifie l'égalité (3), la quatrième égalité est obtenue par factorisation par 2 de l'expression précédente et enfin, la dernière égalité provient de la définition de Φ. Ainsi, on vient de montrer que Φ vérifie (3).

(ii) Par définition de b, on a $\Phi(0) = \psi(0) - b = 0$ (car $b = \psi(0)$). En écrivant alors la relation (3) pour Φ avec $y = 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \Phi(x) + \Phi(0) = 2\Phi(\tfrac{x+0}{2}) = 2\Phi(\tfrac{x}{2}),$$

ce qui est la relation demandée.

(iii) D'après la question précédente, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\Phi(x+y) = 2\Phi(\frac{x+y}{2})$ (il suffit de remplacer x par $\frac{x}{2}$ dans la relation trouvée au (ii)). Ainsi, en remplaçant dans (3) pour Φ, on obtient pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Phi(x) + \Phi(y) = 2\Phi(\tfrac{x+y}{2}) = \Phi(x+y),$$

ce qui est la relation (2).

(iv) D'après la question 1, on sait alors que Φ est de la forme $\Phi(x) = \Phi'(0)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\Phi' = \psi'$ (par définition de Φ) et $\psi'(0) = a$, on a $\Phi'(0) = a$ et donc $\Phi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit alors que $\psi(x) = \Phi(x) + b = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ici, $b = \psi(0)$).

3. (i) Par hypothèse, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En posant $t = \frac{x+y}{2}$ et $s = \frac{x-y}{2}$, en remplaçant dans (1), on obtient

$$f'(t) = \frac{f(t+s) - f(t-s)}{2s}, \quad \text{pour tout } t, s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

En particulier, pour $s = 1$, on a

$$f'(t) = \frac{1}{2}\big(f(t+1) - f(t-1)\big) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto f(t+1)$ et $t \mapsto f(t-1)$ sont elles aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ (par composition de la fonction f avec $t \mapsto t+1$ et $t \mapsto t-1$). Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions. De plus, on a

$$f''(t) = \frac{1}{2}\big(f'(t+1) - f'(t-1)\big) = \frac{1}{4}\big(f(t+2) - 2f(t) + f(t-2)\big), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière égalité est obtenue en utilisant (4) avec $s = 1$ et $t+1$ (pour calculer $f'(t+1)$) ou $t-1$ (pour calculer $f'(t-1)$) à la place de t.

(ii) D'après la relation (4), on a pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

$$2sf'(t) = f(t+s) - f(t-s).$$

En dérivant par rapport à s, on obtient

$$2f'(t) = f'(t+s) - (-f'(t-s)) = f'(t+s) + f'(t-s) \quad \text{pour tout } t, s \in \mathbb{R}.$$

On choisit alors $t = \frac{x+y}{2}$ et $s = \frac{x-y}{2}$, et on obtient

$$2f'(\tfrac{x+y}{2}) = f'(x) + f'(y),$$

ce qui est la relation (3) pour la fonction f'.

(iii) D'après la question 2, on déduit de la question précédente que f' est nécessairement de la forme $f'(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, où $a = (f')'(0)$ et $b = f'(0)$. En intégrant cette dernière égalité, on obtient

$$f(x) = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $a = f''(0)$, $b = f'(0)$ et $c = f(0)$.