Introduction à l'analyse

Corrigé du devoir maison n°3

Énoncé

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+t^2)x''(t)+tx'(t)+a^2x(t)=0, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection deux fois dérivable dont la dérivée ne s'annule nulle part sur $\mathbb{R}$. Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On définit la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $y(s) = x(\varphi^{-1}(s))$.
   (a) Montrer que φ^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $(\varphi^{-1})'$ et $(\varphi^{-1})''$ en fonction de φ' et φ''.
   (b) En déduire que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) En écrivant $x(t) = y(\varphi(t))$, calculer la dérivée et la dérivée seconde de x en fonction des dérivées et dérivées secondes de y et φ.
2. On suppose maintenant que x est solution de l'équation différentielle (E).
   (a) Déterminer, en fonction de φ et ses dérivées, l'équation qui lie $y \circ \varphi$, $y' \circ \varphi$ et $y'' \circ \varphi$.
   (b) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(t) = \operatorname{argsh} t$ vérifie les hypothèses du problème.
   (c) Montrer alors qu'avec ce choix de φ, y vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants que l'on déterminera.
   (d) Résoudre, selon les valeurs de a, cette équation différentielle.
3. Donner, selon les valeurs de a, toutes les solutions de (E).

Corrigé

1. Soit $i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $i(u) = \frac{1}{u}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et sa dérivée vaut
$$i'(u) = -\frac{1}{u^2}, \quad u \neq 0.$$
   (a) D'après le cours, comme φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction réciproque φ^{-1} de φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut
$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(s)\big)} = (i \circ \varphi' \circ \varphi^{-1})(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$
   D'après la règle de dérivation des fonctions composées, comme i est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} = J$, $\varphi' : \mathbb{R} \to J$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (d'après l'énoncé) et $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ (d'après ce qu'on vient de voir), la fonction $(\varphi^{-1})'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1})''(s) &= \left(i\circ\varphi'\circ\varphi^{-1}\right)'(s) \;=\; \left(\varphi'\circ\varphi^{-1}\right)'(s)\cdot i'\left(\varphi'(\varphi^{-1}(s))\right)\\
&= \left(\varphi^{-1}\right)'(s)\cdot\varphi''\left(\varphi^{-1}(s)\right)\cdot\left(\frac{-1}{\left(\varphi'(\varphi^{-1}(s))\right)^2}\right)\\
&= -\frac{\varphi''\left(\varphi^{-1}(s)\right)}{\left(\varphi'(\varphi^{-1}(s))\right)^3}, \qquad s\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) Par définition, y est la composée de x et φ^{-1} toutes deux deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ (x d'après l'énoncé et φ^{-1} d'après la question précédente). Ainsi, par composition de fonctions, y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $x : t\mapsto y(\varphi(t)$: x est la composée de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$x'(t) = \varphi'(t)\cdot y'(\varphi(t))$$

et

$$x''(t) = \varphi''(t)\cdot y'(\varphi(t)) + \varphi'(t)^2\cdot y''(\varphi(t)).$$

2. Maintenant, x est solution de (E).

(a) En reportant les expressions de x, x' et x'' en fonction de y, y', y'', φ, φ' et φ'' dans (E), on obtient :

$$(1+t^2)\left(\varphi''(t)\cdot y'(\varphi(t)) + \varphi'(t)^2\cdot y''(\varphi(t))\right) + t\left(\varphi'(t)\cdot y'(\varphi(t))\right) + a^2 y(\varphi(t)) = 0.$$

En organisant selon y, y' et y'', cela donne

$$(1+t^2)\varphi'(t)^2\cdot y''(\varphi(t)) + \left((1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t)\right)\cdot y'(\varphi(t)) + a^2 y(\varphi(t)) = 0, \quad t\in\mathbb{R}.$$

(b) La fonction $\varphi = \operatorname{argsh}$ est bijective, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée par $\varphi'(t) = \operatorname{argsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc cette fonction vérifie bien les hypothèses de la question 1.

(c) Avec ce choix de φ, on a alors

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \frac{-t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

En reportant dans l'équation trouvée au 2(a), on obtient

$$y''(\operatorname{argsh} t) + a^2 y(\operatorname{argsh} t) = 0, \quad t\in\mathbb{R}.$$

En effet, avec ce choix de φ, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$(1+t^2)\varphi'(t)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0.$$

Ainsi, y est solution de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$.

(d) L'équation différentielle vérifiée par y est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique $r^2 + a^2 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $r_{1,2} = \pm ia$. D'après le cours, les solutions sont donc données par

$$y(s) = \alpha\cos(as) + \beta\sin(as), \quad s\in\mathbb{R}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

3. On a vu que, si x est solution de (E), alors y définie par $y(s) = x(\varphi^{-1}(s))$ est donnée par $y(s) = \alpha\cos(as) + \beta\sin(as)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi, nécessairement, x est de la forme

$$x(t) = y(\varphi(t)) = \alpha\cos(\operatorname{argsh} t) + \beta\sin(\operatorname{argsh} t), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec α et β deux constantes. Montrons inversement que toute fonction x donnée par

$$x(t) = y(\varphi(t)) = \alpha\cos(\operatorname{argsh} t) + \beta\sin(\operatorname{argsh} t), \quad t \in \mathbb{R},$$

est bien solution de (E). Dans ce cas, x est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$) et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \frac{\beta}{\sqrt{1+t^2}}\cos(\operatorname{argsh} t) - \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2}}\sin(\operatorname{argsh} t)$$

et

$$x''(t) = \Big(-\frac{\alpha}{1+t^2)} - \frac{\beta t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)\cos(\operatorname{argsh} t) + \Big(-\frac{\beta}{1+t^2)} - \frac{\alpha t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)\sin(\operatorname{argsh} t).$$

En calculant $(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, on vérifie aisément que cela vaut 0, et donc x est solution de (E). Ce qui permet de conclure que toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$x(t) = y(\varphi(t)) = \alpha\cos(\operatorname{argsh} t) + \beta\sin(\operatorname{argsh} t), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec α et β deux constantes.