Introduction à l'analyse

Devoir maison n°4

Dans ce problème, on va montrer par l'absurde que le nombre π est irrationnel. On suppose donc que π est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers p et q, $q \neq 0$, tels que $\pi = \frac{p}{q}$.

1. Question préliminaire : Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est nécessairement constante à partir d'un certain rang.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$I_n = \int_0^\pi \big(x(p-qx)\big)^n \sin x \, dx.$$
   (i) Calculer I_0 et I_1.
   (ii) Étudier le signe de $x \mapsto \big(x(p-qx)^n\big)\sin x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
   En déduire que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (iii) En intégrant par parties (au moins deux fois), montrer que
$$I_n = 2nq(2n-1)I_{n-1} - n(n-1)p^2 I_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$
   (iv) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un multiple entier de $n!$ (on pourra faire un raisonnement par récurrence).
   On notera $I_n = n!k_n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. (i) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $0 \leq x(p-qx) \leq \frac{p^2}{4q}$.
   (ii) En déduire que
$$I_n \leq 2\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
   (iii) Montrer alors que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où k_n a été défini au 2.(iv)) est convergente, de limite 0.
   (iv) Montrer que nécessairement $k_n = 0$ pour n assez grand (on se souviendra que $k_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

4. Montrer que 2.(ii) et 3.(iv) sont en contradiction. Que peut-on en conclure ?

Corrigé

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers convergente dans $\mathbb{R}$: c'est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors d'après la définition d'une suite de Cauchy, on peut écrire (pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ par exemple) :
$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \geq N \ : \ |x_p - x_q| < \frac{1}{2}.$$
   Or d'après l'hypothèse, pour tout $p,q \geq N$, $x_p, x_q \in \mathbb{N}$: x_p et x_q sont donc deux entiers qui diffèrent de moins de $\frac{1}{2}$; on en déduit qu'ils sont égaux. On a donc montré que pour tout $p,q \geq N$, $x_p = x_q$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang N.

   Remarquons que le raisonnement ci-dessus fonctionne si on choisit un autre $\varepsilon \in]0,1[$.

2. (i) On a
$$I_0 = \int_0^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = 2$$
et en intégrant par parties (à deux reprises), on obtient pour I_1 :
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi x(p-qx)\sin x\,dx \;=\; \big[-x(p-qx)\cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi (p-2qx)\cos x\,dx \\ &= \big[(p-2qx)\sin x\big]_0^\pi + \int_0^\pi 2q\sin x\,dx \;=\; 4q. \end{aligned}$$
En effet, comme on a supposé $\pi = \frac{p}{q}$, on a $p - q\pi = 0$. D'autre part, $\sin 0 = \sin\pi = 0$, ce qui permet de traiter les expressions entre crochets.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $x \in]0,\pi[$, on a $x > 0$ et $p - qx = q(\pi - x) > 0$ et $\sin x > 0$. Ainsi, la fonction à intégrer, $x \mapsto \big(x(p-qx)\big)^n \sin x$, est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[$ (et s'annule en 0 et en π) : on en déduit alors que l'intégrale I_n est strictement positive.

(iii) Soit $n \geq 2$. On veut intégrer I_n par parties : on pose $u(x) = \big(x(p-qx)\big)^n$ et $v'(x) = \sin x$, ce qui donne $u'(x) = n(p-2qx)\big(x(p-qx)\big)^{n-1}$ et $v(x) = -\cos x$. On a alors
$$I_n = \big[-\big(x(p-qx)\big)^n \cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi n(p-2qx)\big(x(p-qx)\big)^{n-1}\cos x\,dx.$$
L'expression entre crochets est nulle car en $x = 0$ et en $x = \pi = \frac{p}{q}$, on a $x(p-qx) = 0$. On intègre une deuxième fois par parties, en posant $u(x) = n(p-2qx)\big(x(p-qx)\big)^{n-1}$ et $v'(x) = \cos x$: on a $v(x) = \sin x$ et
$$\begin{aligned} u'(x) &= -2qn\big(x(p-qx)\big)^{n-1} + n(n-1)(p-2qx)^2\big(x(p-qx)\big)^{n-2} \\ &= n\big(x(p-qx)\big)^{n-2}\big(-2qx(p-qx) + (n-1)(p-2qx)^2\big) \\ &= n\big(x(p-qx)\big)^{n-2}\big(2(2n-1)q^2x^2 - qp(2n-1)x + p^2(n-1)\big) \\ &= n\big(x(p-qx)\big)^{n-2}\big(-2(2n-1)qx(p-qx) + p^2(n-1)\big) \\ &= -2nq(2n-1)\big(x(p-qx)\big)^{n-1} + n(n-1)p^2\big(x(p-qx)\big)^{n-2}. \end{aligned}$$
Ainsi, on obtient
$$\begin{aligned} I_n &= \big[n(p-2qx)\big(x(p-qx)\big)^{n-1}\sin x\big]_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi \Big(-2nq(2n-1)\big(x(p-qx)\big)^{n-1} + n(n-1)p^2\big(x(p-qx)\big)^{n-2}\Big)\sin x\,dx \\ &= 2nq(2n-1)\int_0^\pi \big(x(p-qx)\big)^{n-1}\sin x\,dx - n(n-1)p^2\int_0^\pi \big(x(p-qx)\big)^{n-2}\sin x\,dx \\ &= 2nq(2n-1)I_{n-1} - n(n-1)p^2 I_{n-2}. \end{aligned}$$
Dans la première égalité, l'expression entre crochets est nulle car $\sin 0 = \sin\pi = 0$.

(iv) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition (P_n) suivante :

I_n est multiple entier de $n!$.

Il est facile de voir que $I_0 = 2$ est multiple entier de $0! = 1$. De même, comme $q \in \mathbb{N}$, $I_1 = 4q$ est multiple entier de $1! = 1$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tel que (P_k) soit vrai pour tout $k \leq n$. On a alors, d'après la formule démontrée au 1.(iii) :
$$I_{n+1} = (n+1)\big(q(2n+1)I_n\big) - (n+1)n\big(p^2 I_{n-1}\big).$$

D'après l'hypothèse de récurrence sur n, on sait que I_n est un multiple entier de $n!$. Comme $q(2n+1)$ est un entier, on en déduit que $(n+1)\big(q(2n+1)I_n\big)$ est un multiple entier de $(n+1)n! = (n+1)!$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence sur n implique aussi que I_{n-1} est un multiple entier de $(n-1)!$. Comme p^2 est un entier, on en déduit que $(n+1)n\big(p^2 I_{n-1}\big)$ est un multiple entier de $(n+1)n(n-1)! = (n+1)!$. La somme de deux multiples entiers de $(n+1)!$ est un multiple entier de $(n+1)!$, et donc I_{n+1} est un multiple entier de $(n+1)!$, ce qui montre que (P_{n+1}) est vraie. On savait déjà d'après l'hypothèse de récurrence que (P_k) était vraie pour tout $k \leq n$, on en déduit donc que (P_k) est vraie pour tout $k \leq n+1$.

Ainsi, on a montré par récurrence que (P_n) était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (i) La fonction $f : x \mapsto x(p-qx)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et sa dérivée est définie pour tout $x \in [0,\pi]$ par $f'(x) = p - 2qx$: f' s'annule en $x = \frac{p}{2q}$, $f'(x) \geq 0$ si $x \in [0, \frac{p}{2q}]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\frac{p}{2q}, \pi]$ (rappelons que $\pi = \frac{p}{q}$). Ainsi, f admet sur $[0,\pi]$ un maximum en $x = \frac{p}{2q}$ et ce maximum vaut $f(\frac{p}{2q}) = \frac{p^2}{4q}$. On a ainsi $f(x) \leq \frac{p^2}{4q}$ pour tout $x \in [0,\pi]$.

(ii) D'après l'expression de I_n, on peut écrire

$$I_n = \int_0^\pi f(x)^n \sin x \, dx.$$

Comme $\sin x \geq 0$ pour tout $x \in [0,\pi]$, on a, d'après la question précédente, la majoration suivante :

$$f(x)^n \sin x \leq \Big(\frac{p^2}{4q}\Big)^n \sin x, \quad \forall x \in [0,\pi].$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et π, on obtient

$$I_n \leq \int_0^\pi \Big(\frac{p^2}{4q}\Big)^n \sin x \, dx = \Big(\frac{p^2}{4q}\Big)^n \int_0^\pi \sin x \, dx = 2\Big(\frac{p^2}{4q}\Big)^n.$$

(iii) Dans la question 2.(iv), on a défini k_n par $I_n = n!k_n$ (on sait alors que $k_n \in \mathbb{N}$). L'inégalité précédente devient alors

$$k_n \leq 2\frac{1}{n!}\Big(\frac{p^2}{4q}\Big)^n.$$

On a besoin du résultat suivant :
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $\big(\frac{a^n}{n!}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite 0.

Preuve. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a| < N$ (on peut prendre $N = [|a|] + 1$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière). On a alors pour tout $k \geq N+1$: $\frac{|a|}{k} \leq \frac{|a|}{N} = \alpha < 1$. Ainsi, on obtient pour tout $n \geq N+1$

$$\Big|\frac{a^n}{n!}\Big| = \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{n-1} \cdot \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^N}{N!} \cdot \Big(\frac{|a|}{N}\Big)^{n-N} = \frac{|a|^N}{N!}\alpha^{n-N} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

L'inégalité ci-dessus est due au fait que pour tout $k \geq N+1$: $\frac{|a|}{k} \leq \frac{|a|}{N}$. L'égalité qui suit vient de la définition de $\alpha = \frac{|a|}{N}$ et la convergence provient du fait que $0 \leq \alpha < 1$. $\square$

En considérant alors $a = \frac{p^2}{4q}$, on a

$$\frac{1}{n!}\Big(\frac{p^2}{4q}\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme $k_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par le théorème d'encadrement : $k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(iv) D'après la question préliminaire, on sait qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang. Ainsi, comme $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers qui converge vers 0, on en déduit que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang. Une suite constante à partir d'un certain rang et qui converge vers 0 est nécessairement nulle à partir d'un certain rang. Ainsi, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $k_n = 0$.

4. Dans 2.(iv), on a montré que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc comme $k_n = \frac{1}{n!} I_n$, on a aussi $k_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or dans 3.(iv), on a montré que $k_n = 0$ pour n assez grand, ce qui est une contradiction (k_n ne peut être à la fois strictement positif et nul). L'hypothèse de départ (π est un rationnel) est donc fausse. On vient donc de montrer que π est irrationnel.