Université Aix-Marseille | 2012–2013

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Mercredi 3 octobre 2012

Exercice 1.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, rappeler les formules qui donnent $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin y$.

2. Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient
$$\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 2, \tag{1}$$
puis tous les $y \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\sqrt{3}\cos y - \sin y = 4. \tag{2}$$

3. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $y = \arccos x + \arcsin x$.
   - (i) Montrer que $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
   - (ii) Calculer $\cos y$ et $\sin y$.
   - (iii) En déduire la valeur de y.
   - (iv) En étudiant la fonction $x \mapsto \arccos x + \arcsin x$, retrouver la valeur de y du (iii).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \cosh x + 3\sinh x$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f.

2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa fonction réciproque notée g.

3. En observant que $f(0) = 1$, calculer $g'(1)$.

Exercice 3. Soient f et g les fonctions réelles définies par
$$f(x) = x^2\, e^{-\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\, e^{-\sqrt{\ln(x)}}$$

1. Faire une étude de f, en particulier les limites aux extrémités de son domaine de définition. Tracer la courbe représentative de f

2. Donner le domaine de définition de g et calculer sa dérivée et ses limites aux extrémités de son domaine de définition.

Indication : on pourra calculer $\ln(f)$ *et* $\ln(g)$ *pour déterminer certaines limites.*