M2 - Introduction à l'analyse

Éléments de correction du DS1

Exercice 1

1. Pour $x,y \in \mathbb{R}$, on a (voir cours)

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{et} \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x.$$

2. Remarquons dans un premier temps que

$$\cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

En divisant l'équation (1) par 2 et en utilisant la formule obtenue ci-dessus pour le cosinus avec x et $y = -\frac{\pi}{4}$, l'égalité (1) devient :

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = 1,$$

ce qui implique que $x - \frac{\pi}{4}$ vaut 0 modulo 2π, c'est à-dire :

$$\{x \in \mathbb{R}; (1) \text{ est vérifiée}\} = \{0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

On traite l'équation (2) en suivant la même méthode. Remarquons que

$$\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

En divisant l'équation (2) par 2 et en utilisant la formule obtenue pour le cosinus avec $x = \frac{\pi}{6}$ et y, l'égalité (2) devient :

$$\cos(y + \tfrac{\pi}{6}) = 2,$$

ce qui n'a pas de solution (car le cosinus prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$), c'est-à-dire :

$$\{x \in \mathbb{R}; (2) \text{ est vérifiée}\} = \emptyset.$$

3. (i) On sait que arccos et arcsin sont définies sur $[-1,1]$, ce qui montre que pour $x \in [-1,1]$, l'expression $y = \arccos x + \arcsin x$ a un sens. D'autre part, on a, en additionnant les deux lignes d'inégalités (la première provient du fait que arccos prend ses valeurs dans $[0,\pi]$ et la deuxième du fait que arcsin prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) :

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & \arccos x & \leq & \pi \\ -\frac{\pi}{2} & \leq & \arcsin x & \leq & \frac{\pi}{2} \\ \hline -\frac{\pi}{2} & \leq & \arccos x + \arcsin x & \leq & \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

ce qui prouve que $y = \arccos x + \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

(*ii*) Pour $x \in [-1,1]$, $\arccos x \in [0,\pi]$, donc $\sin(\arccos x) \geq 0$. En utilisant la formule de Pythagore $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, on en déduit alors que

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1,1].$$

D'autre part, pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\cos(\arcsin x) \geq 0$. On en déduit, comme plus haut, que

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1,1].$$

Rappelons aussi que pour $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arccos x) = x$ et $\sin(\arcsin x) = x$. En utilisant maintenant la formule trouvée au 1. pour le cosinus d'une somme, on obtient

$$\begin{aligned} \cos(y) &= \cos(\arccos x + \arcsin x) \\ &= \cos(\arccos x)\cos(\arcsin x) - \sin(\arccos x)\sin(\arcsin x) \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \cdot x \;=\; 0. \end{aligned}$$

De même, en utilisant la formule trouvée au 1. pour le sinus d'une somme, on obtient

$$\begin{aligned} \sin(y) &= \sin(\arccos x + \arcsin x) \\ &= \sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) + \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) \\ &= \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot x \\ &= 1 - x^2 + x^2 \;=\; 1. \end{aligned}$$

On a donc $\cos y = 0$ et $\sin y = 1$.

(*iii*) On a vu au (*i*) que $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ et au (*ii*) que $\cos y = 0$ et $\sin y = 1$. On en déduit donc que $y = \frac{\pi}{2}$.

(*iv*) On appelle f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. On sait, d'après le cours, que les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1,1]$ et dérivables sur $]-1,1[$. Ainsi, la fonction f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de telles fonctions. De plus, on a pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \arccos' x + \arcsin' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

On en déduit alors que f est constante sur $]-1,1[$. Comme, de plus, f est continue jusqu'aux bornes de son intervalle de définition, f est constante sur $[-1,1]$. Prenons une valeur particulière de x pour trouver la valeur de f ; par exemple, $x = 0$. On a

$$f(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

On retrouve donc bien que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Exercice 2

1. On a vu dans le cours que les fonctions cosh et sinh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \cosh' x + 3\sinh' x = \sinh x + 3\cosh x = e^x + 2\cosh x.$$

2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, prend ses valeurs dans
$$\Big]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big[= \mathbb{R}.$$
Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque g est définie par
$$g(y) = x \quad \text{si, et seulement si,} \quad y = f(x).$$
Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on veut donc trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Si on écrit $f(x)$ à l'aide de e^x et e^{-x}, on obtient $f(x) = 2e^x - e^{-x}$. En posant $X = e^x$ (remarquons que $X > 0$ car c'est l'exponentielle d'un réel), on obtient alors l'équation suivante à résoudre (en X)
$$2X - \frac{1}{X} = y, \quad \text{ou encore} \quad 2X^2 - yX - 1 = 0.$$
Cette dernière égalité a deux racines $X = \frac{1}{4}\big(y \pm \sqrt{y^2+8}\big)$. On ne retient que la racine positive (car on a vu que $X > 0$), c'est-à-dire $X = \frac{1}{4}\big(y + \sqrt{y^2+8}\big)$, et donc x vérifie
$$e^x = \frac{1}{4}\big(y + \sqrt{y^2+8}\big),$$
ce qui donne finalement $x = \ln\big[\frac{1}{4}\big(y + \sqrt{y^2+8}\big)\big]$. Ainsi, g est définie par
$$g(y) = \ln\big[\tfrac{1}{4}\big(y + \sqrt{y^2+8}\big)\big], \qquad y \in \mathbb{R}.$$

3. On a $f(0) = \cosh 0 + 3\sinh 0 = 1 + 3\cdot 0 = 1$. En posant $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, on a alors $g(y_0) = x_0$ et (voir la formule dans le cours)
$$g'(1) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3},$$
car $f'(0) = \sinh 0 + 3\cosh 0 = 0 + 3\cdot 1 = 3$.

Exercice 3

1. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 e^{-\sqrt{x}}$ admet comme domaine de définition
$$D_f = \big\{x \in \mathbb{R}; f(x) \text{ existe}\big\} = [0, +\infty[.$$
La fonction f est continue sur son domaine de définition. Elle est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. En effet, on peut écrire f comme le produit de $x \mapsto x^2$ (continue et dérivable sur $\mathbb{R}$) avec la fonction composée $\exp\circ\varphi$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(x) = -\sqrt{x}$: la fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et φ est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$. On a ainsi, pour $x \in]0,+\infty[$
$$f'(x) = 2x\cdot e^{\sqrt{x}} + x^2\cdot\big(-\tfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\big) = \tfrac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}\big(4-\sqrt{x}\big),$$
ce qui donne le tableau de variations suivant pour f :

x	0		16		$+\infty$
f'	$\vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$16e^{-4}$	$\searrow$	

On peut remarquer que f' est prolongeable par continuité en 0 par $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$. Il faut maintenant déterminer la limite de f en $+\infty$. En effet, f étant continue en 0, on a

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

D'autre part, on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$. Ainsi, comme $x^2 = e^{2\ln x}$ pour $x > 0$, on a

$$x^2 e^{-\sqrt{x}} = \exp\Big(-\sqrt{x}\,\big(1 + \tfrac{2\ln x}{\sqrt{x}}\big)\Big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

On vient donc de montrer que f prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 16e^{-4}]$, cette fonction est croissante sur $[0, 16]$, décroissante sur $[16, +\infty[$, a une dérivée nulle en 16, vaut 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

2. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xe^{-\sqrt{\ln x}}$ admet comme domaine de définition

$$\begin{aligned} D_g &= \big\{x \in \mathbb{R}; g(x) \text{ existe}\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}; \ln x \geq 0\big\} \;=\; [1, +\infty[. \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur son domaine de définition. Elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée et produit de telles fonctions. En effet, g est le produit de $x \mapsto x$ (dérivable sur $\mathbb{R}$) avec la composée de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $x \mapsto -\sqrt{\ln x}$; cette dernière fonction est elle-même la composée de ln, dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $\sqrt{\cdot}$ dérivable sur $]0, +\infty[$. Or $\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$, ce qui donne le domaine de dérivabilité de g. On a ainsi, pour $x > 1$

$$g'(x) = e^{-\sqrt{\ln x}} + x \cdot \big(\tfrac{-1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \tfrac{1}{x}\big) e^{-\sqrt{\ln x}} = \tfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\, e^{-\sqrt{\ln x}}\,(2\sqrt{\ln x} - 1),$$

ce qui donne le tableau de variations suivant pour g :

x	1		$e^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
g'	$\vert$	$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\nearrow$	

Comme g est continue sur $[1, +\infty[$, donc en particulier au point $x = 1$, on a $\lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1) = 1$. Il reste à déterminer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$. On remarque que $x = e^{\ln x}$ pour tout $x > 0$, donc en particulier pour $x \geq 1$. Ainsi, pour tout $x \geq 1$, on a

$$g(x) = \exp(\ln x - \sqrt{\ln x}) = \exp\big(\sqrt{\ln x}(\sqrt{\ln x} - 1)\big).$$

Comme $\sqrt{\ln x}(\sqrt{\ln x} - 1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^y \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$