Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 1

corrigé

Vendredi 4 octobre 2013

Exercice 1.

On considère l'affirmation suivante : "On peut trouver un nombre réel strictement positif dont le cosinus est inférieur ou égal aux sinus de tous les autres réels (positifs ou négatifs)".

1. Écrire cette affirmation en langage mathématique.
2. Écrire sa négation.
3. Entre l'affirmation et sa négation, déterminer, en justifiant la réponse, celle qui est vraie.

Correction :

1. En langage logique, l'affirmation donne :
$$\exists x \in]0,+\infty[, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, \cos(x) \leq \sin(y).$$
Remarque : par abus de langage, on pourrait considérer que l'énoncé n'exclut pas le réel de départ parmi "tous les autres réels", mais ce serait extrapoler sur la volonté de l'auteur de cette affirmation.
2. Sa négation donne :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, \cos(x) > \sin(y).$$
3. L'affirmation de départ est vraie. En effet, il suffit de prendre $x = \pi$. On a alors $\cos(x) = -1$ et l'on sait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\sin(y) \geq -1 = \cos(x)$. L'inégalité reste donc a fortiori vraie pour $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$.

Exercice 2.

1. Rappeler les formules qui lient sinus et cosinus des angles x et $\frac{\pi}{2} - x$.
2. Rappeler les ensembles de définition et de valeurs des fonctions arccosinus et arcsinus.
3. Exprimer en fonction de x l'expression $\arccos(\sin x)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Donner les valeurs de $\arccos\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right)$, $\arccos\left(\sin(-\frac{5\pi}{6})\right)$, $\arccos\left(\sin \frac{8\pi}{3}\right)$.
5. Simplifier l'expression $\arccos(\sin x)$ pour $x \in [-\pi, 2\pi]$ (on pourra décomposer le problème sur plusieurs intervalles).

Correction :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
2. Par convention, on a $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ et $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a
$$\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$
car alors $\frac{\pi}{2} - x \in [0,\pi]$.
4. D'après la question précédente, en se ramenant à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on trouve :
   - $\arccos\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)\right) = \arccos\left(-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;
   - $\arccos\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(-\sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi\right)\right) = \arccos\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$;
   - $\arccos\left(\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\sin\left(\frac{8\pi}{3} - 3\pi\right)\right) = \arccos\left(-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
5. On décompose selon les différents intervalles :

- Si $x \in \left[-3\pi, -\frac{5\pi}{2}\right[$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\big(\sin(-x-3\pi)\big) = \frac{\pi}{2} + x + 3\pi = \frac{7\pi}{2} + x$;
- Si $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right[$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\big(\sin(x+2\pi)\big) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} - x$;
- Si $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\big(\sin(-x-\pi)\big) = \frac{\pi}{2} + x + \pi = \frac{3\pi}{2} + x$;
- Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \frac{\pi}{2} - x$;
- Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\big(\sin(-x+\pi)\big) = \frac{\pi}{2} + x - \pi = x - \frac{\pi}{2}$;
- Si $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\big(\sin(x-2\pi)\big) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$;
- Si $x \in \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right]$: alors $\arccos\big(\sin(x)\big) = \arccos\big(\sin(3\pi-x)\big) = \frac{\pi}{2} + x - 3\pi = x - \frac{5\pi}{2}$.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(2x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x) = \cos(x)$.
3. Après avoir donné le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de l'expression $\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi x}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x^2 - x) = \sin(x^2 + x)$.
4. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(2x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x) = -\sin(2x) \;\Leftrightarrow\; \sin(x) = \sin(-2x) \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -2x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = 2x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 3x = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

   L'ensemble des solution est donc $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. On a $\tan(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \big(\sin(x) = \cos^2(x) \text{ et } \cos(x) \neq 0\big)$. Mais si $\cos(x) = 0$, alors $\sin(x) \neq 0$ et l'équation $\sin(x) = \cos^2(x)$ ne peut pas être vérifiée. La condition $\cos(x) \neq 0$ est donc une conséquence de $\sin(x) = \cos^2(x)$. De fait, on a

$$\begin{aligned}
\tan(x) = \cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x) = \cos^2(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) = 1 - \sin^2(x).
\end{aligned}$$

   En posant $X = \sin(x)$, on a alors $X^2 + X - 1 = 0$. Il s'agit d'une équation trinômiale dont les seules solutions sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Toutefois $X = \sin(x) \in [-1, 1]$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ puisque $\sqrt{5} > 1$. On a par contre $1 < 5 < 9$ et donc $0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ On en déduit donc $\tan(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \pm \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. La fonction racine n'étant définie que sur $[0, +\infty[$, l'expression $\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi x}$ n'est définie que pour $\frac{\pi}{4} + \pi x \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq -\frac{1}{4}$.

On a

$$\begin{aligned}
\cos(x^2-x)=\sin(x^2+x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x^2-x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x^2-x\right)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-x=\frac{\pi}{2}-x^2-x+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou}\\ x^2-x=x^2+x-\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{\pi}{2}-2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{4}+kk\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{4}+k\pi} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\cap\left[\frac{-1}{4},\infty\right[\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{4}+kk\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Au final, l'ensemble des solutions est $\left\{\pm\sqrt{\frac{\pi}{4}+k\pi}\middle|k\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)\\
&= \big(2\cos^2(x)-1\big)\cos(x)-2\cos(x)\sin^2(x) = 2\cos^3(x)-\cos(x)-2\cos(x)\big(1-\cos^2(x)\big)\\
&= 4\cos^3(x)-3\cos(x);
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x)+\sin(x)\cos(2x)\\
&= 2\sin(x)\cos^2(x)+\sin(x)\big(1-2\sin^2(x)\big) = 2\sin(x)\big(1-\sin^2(x)\big)+\sin(x)-2\sin^3(x)\\
&= 3\sin(x)-4\sin^3(x).
\end{aligned}$$

Remarque : La seconde égalité aurait pu être dretrouvée à partir de la première en utilisant à de multiples reprises l'égalité $\sin(y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ et $\cos(y+\pi)=-\cos(y)$.

Exercice 4.

1. Donner la définition de l'injectivité et de la surjectivité d'une application.
2. Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}&\to&\mathbb{R}_+\\ z&\mapsto&|z|\end{array}, \qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{C}\\ n&\mapsto&ne^{i\frac{n\pi}{3}}\end{array}, \qquad h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\mathrm{ch}(x)-2\mathrm{sh}(x)\end{array}.$$

3. Pour celles qui sont bijectives, déterminer une expression explicite pour la fonction réciproque.

Correction :

1. Soit $f:A\to B$ une applications entre deux ensembles A et B.
   - On dit que f est injective ssi $\forall x,y\in A, f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$.
   - On dit que f est surjective ssi $\forall y\in B,\exists x\in A, y=f(x)$.
2. **La fonction f :**
   - n'est pas injective car $f(-1)=f(1)$;
   - est surjective car, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on a $x\in\mathbb{C}$ et $|x|=x$;
   - n'est pas bijective car non injective.

   La fonction g :
   - est injective, car pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|g(n)|=n$; or si $g(n)=g(m)$, alors $|g(n)|=|g(m)|$;

- n'est pas surjective, d'après ce qui précède, $|g(n)|$ est toujours un entier. Aucun nombre complexe de module, par exemple, $\frac{1}{2}$ ne sera donc atteint ;
- n'est pas bijective car non surjective.

La fonction h :

est bijective, donc injective et surjective. En effet, fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ et essayons de résoudre l'équation $h(x) = y_0$. Cela donne

$$\begin{aligned} h(x) = y_0 &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} - e^x + e^{-x} = y_0 \\ &\Leftrightarrow 3e^{-x} - e^x = 2y_0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 2y_0 e^x - e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

En posant $X = e^x$, cela donne une équation trinomiale de déterminant $\Delta = 4y_0^2 + 12 > 0$ dont les solutions sont $\frac{-2y_0 \pm \sqrt{4y_0^2+12}}{2} = -y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 3}$. On peut remarquer, d'une part, que $\sqrt{y_0^2 + 3} > |y_0|$ et donc que $-y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 3}$ est du signe de $\pm\sqrt{y_0^2 + 3}$ et, d'autre part, que $X = e^x$ est positif. On en déduit que

$$h(x) = y_0 \Leftrightarrow e^x = \sqrt{y_0^2 + 3} - y_0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\sqrt{y_0^2 + 3} - y_0\right).$$

Le réel y_0 a donc une unique antécédent par h. La fonction est donc bijective. Par ailleurs, le calcul précédent donne $h^{-1}(y) = \ln\left(\sqrt{y^2 + 3} - y\right)$.