Université Aix-Marseille 2012–2013

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 2

Vendredi 16 novembre 2012

Exercice 1. Soit $b \in \mathbb{R}$ un paramètre. On note (E_b) l'équation différentielle du deuxième ordre suivante

$$y'' + 6y' + 9(1-b)y = 0.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de b, la forme générale des solutions de (E_b) sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $b = -1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = e^{-3t}\big(\cos(2t) + 2\sin(2t)\big)$.

   (i) Déterminer $c_1 \in \mathbb{R}$ et $c_2 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(t) = e^{-3t}\big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

   soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

   $$y'' + 6y' + 18y = g. \tag{1}$$

   (ii) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0 et dont la dérivée vaut 2 en 0.

Exercice 2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (du premier ordre non homogène à coefficients non constants) suivante :

$$y'(x) - \frac{1}{1+x^2}\,y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 avec $f'(0) = a \neq 0$ et vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1. Montrer que si une fonction vérifiant (3) s'annule en un point, alors elle est nulle partout. En déduire que f ne peut pas s'annuler.
2. Montrer que $f(0) = 1$, puis que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on pourra écrire $f(x)$ en fonction de $f(\frac{x}{2})$).
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En étudiant le taux d'accroissement de f au point x, montrer que f est dérivable en x et que $f'(x) = af(x)$.
4. En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}$.