Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 2

Vendredi 8 novembre 2013

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre les exercices 3 et 4.

Exercice 1. (4 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On considère $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}$.

1. La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Dessiner le graphe de f sur $[-3, 3]$.
3. Déterminer deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que, simultanément,
   (a) $0 \notin I$;
   (b) la fonction $\widetilde{f}\colon \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ soit bien définie ;
   (c) les fonctions $\widetilde{f}$ et f aient la même image ;
   (d) $\widetilde{f}$ soit bijective.
4. Donner une formule explicite pour $\widetilde{f}^{-1} : J \to I$.

Exercice 2. (5 points)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f, g : I \to]0, +\infty[$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in I$, $h(x) = \ln\big(f(x) + \sqrt{g(x)}\big)$.

1. Donner le domaine de dérivabilité de h.
2. Calculer h' en fonction de f, f', g et g'.
3. On considère maintenant $\varphi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) := \ln\Big(\arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}\Big)$. Dériver φ et montrer que, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a
$$\frac{1}{\varphi'(\sin(t))} = \frac{1 + \sin(t)}{\cos(t)}\big(t + \cos(t)\big).$$

Exercice 3. (3 points)

On considère la fonction $f : \left(x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$.

1. Donner le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de f ainsi que son domaine de dérivabilité.
2. Calculer f'.
3. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a
$$\arctan\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) + \arctan\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) + \arctan(x) + \frac{\pi}{4} = 0.$$

TSVP $\Longrightarrow$

Exercice 4. (8 points)

1. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f\colon \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array}$;

   (b) $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{(1+x^2)^2} \end{array}$;

   (c) $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \end{array}$.

2. Donner les primitives des fonctions suivantes :
   (a) $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\sqrt{1+x}} \end{array}$ (on pourra poser $t = \sqrt{1+x}$) ;

   (b) $k\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{9+x^2} \end{array}$ (on pourra poser $t = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{3}\right)$).