Université Aix-Marseille	2012–2013

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Corrigé du DS n° 2

Vendredi 16 novembre 2012

Énoncé

Exercice 1. Soit $b \in \mathbb{R}$ un paramètre. On note (E_b) l'équation différentielle du deuxième ordre suivante

$$y'' + 6y' + 9(1-b)y = 0.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de b, la forme générale des solutions de (E_b) sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $b = -1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = e^{-3t}\big(\cos(2t) + 2\sin(2t)\big)$.

   (i) Déterminer $c_1 \in \mathbb{R}$ et $c_2 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(t) = e^{-3t}\big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

   soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

   $$y'' + 6y' + 18y = g. \tag{1}$$

   (ii) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0 et dont la dérivée vaut 2 en 0.

Exercice 2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (du premier ordre non homogène à coefficients non constants) suivante :

$$y'(x) - \frac{1}{1+x^2}\,y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 avec $f'(0) = a \neq 0$ et vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1. Montrer que si une fonction vérifiant (3) s'annule en un point, alors elle est nulle partout. En déduire que f ne peut pas s'annuler.
2. Montrer que $f(0) = 1$, puis que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on pourra écrire $f(x)$ en fonction de $f(\frac{x}{2})$).
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En étudiant le taux d'accroissement de f au point x, montrer que f est dérivable en x et que $f'(x) = af(x)$.
4. En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Exercice 1.

1. L'équation caractéristique associée à (E_b) est

   $$r^2 + 6r + 9(1-b) = 0 \tag{4}$$

   dont le Δ vaut $\Delta = 36b$. Ainsi,

(i) si $b > 0$, alors (4) a deux racines réelles : $-3 \pm 3\sqrt{b}$, et la solution générale de (E_b) a la forme suivante :

$$y(t) = e^{-3t}\big(\lambda e^{3t\sqrt{b}} + \mu e^{-3t\sqrt{b}}\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes ;

(ii) si $b = 0$, alors (4) a une racine réelle double : -3, et la solution générale de (E_b) a la forme suivante :

$$y(t) = (\lambda + \mu t)e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes ;

(iii) si $b < 0$, alors (4) a deux racines complexes conjuguées : $-3 \pm i\sqrt{-b}$, et la solution générale de (E_b) a la forme suivante :

$$y(t) = e^{-3t}\big(\lambda \cos(3t\sqrt{-b}) + \mu \sin(3t\sqrt{-b})\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

2. Lorsque $b = -1$, (E_b) devient $y'' + 6y' + 18y = 0$ et la solution générale de cette équation différentielle est donnée par le cas (iii) plus haut :

$$y(t) = e^{-3t}\big(\lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

(i) La fonction f donnée par $f(t) = e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ où c_1 et c_2 sont des constantes est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions (exponentielle, sinus, cosinus). On a

$$f'(t) = e^{-3t}\big((-3c_1 + 2c_2)\cos 2t + (-2c_1 - 3c_2)\sin 2t\big)$$

et

$$\begin{aligned} f''(t) &= e^{-3t}\Big(\big(-3(-3c_1 + 2c_2) + 2(-2c_1 - 3c_2)\big)\cos 2t + \big(-3(-2c_1 - 3c_2) - 2(-3c_1 + 2c_2)\big)\sin 2t\Big) \\ &= e^{-3t}\big((5c_1 - 12c_2)\cos 2t + (12c_1 + 5c_2)\sin 2t\big). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient

$$\begin{aligned} e^{-3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) &= g(t) = f''(t) + 6f'(t) + 18f(t) \\ &= e^{-3t}\Big(\big((5c_1 - 12c_2) + 6(-3c_1 + 2c_2) + 18c_1\big)\cos 2t \\ &\quad + \big((12c_1 + 5c_2) + 6(-2c_1 - 3c_2) + 18c_2\big)\sin 2t\Big) \\ &= e^{-3t}(5c_1 \cos 2t + 5c_2 \sin 2t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci donne, pour $t = 0$, $c_1 = \frac{1}{5}$ et pour $t = \frac{\pi}{4}$, $c_2 = \frac{2}{5}$. Inversement, pour ces valeurs de c_1 et de c_2, on vérifie bien que les deux fonctions sont égales. Ainsi, une solution particulière de (1) est

$$f(t) = \frac{1}{5}\, e^{-3t}(\cos 2t + 2\sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) La solution générale de (1) est donnée par la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière ; on a alors

$$y(t) = e^{-3t}\Big(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\sin 2t\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On veut $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$, ce qui nous permet de déterminer λ et μ : la condition $y(0) = 0$ implique que $\lambda + \frac{1}{5} = 0$, et la condition $y'(0) = 2$ implique que $-3\lambda + 3\mu + \frac{1}{5} = 2$. Ainsi, on obtient $\lambda = -\frac{1}{5}$ et $\mu = \frac{2}{5}$. La fonction cherchée est :

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{-3t}(\cos 2t + \cos 3t + 2\sin 2t + 2\sin 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

L'équation homogène associée à l'équation différentielle (2) a la forme

$$y' - ay = 0, \quad \text{avec} \quad a(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{5}$$

et on remarque que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a vu (en exercice) que les solutions de (5) sont de la forme

$$y(x) = \lambda\, e^{A(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et A est une primitive de a ; ici, on peut prendre $A(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de (2), on utilise la méthode dite de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche une solution particulière de (2) sous la forme

$$y_p(x) = \lambda(x)\, e^{\arctan x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En reportant la forme de y_p dans (2), on obtient :

$$\lambda'(x)\, e^{\arctan x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{\arctan x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ce qui donne $\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: λ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi, on peut prendre $\lambda(x) = \operatorname{argsh} x$, $x \in \mathbb{R}$, et une solution particulière de (2) est alors

$$y_p(x) = \operatorname{argsh} x\ e^{\arctan x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (2) a alors la forme suivante :

$$y(x) = (\lambda + \operatorname{argsh} x)\, e^{\arctan x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante (à déterminer éventuellement en fonction des conditions initiales imposées à la solution).

Exercice 3.

1. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a d'après la formule (3), $f(y) = f(y - x_0 + x_0) = f(y - x_0)f(x_0) = 0$, et donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui implique en particulier que $f'(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f'(0) = a \neq 0$. On en déduit donc que f ne s'annule nulle part.

2. En faisant $x = y = 0$ dans la formule (3), on a $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$. Comme f ne s'annule nulle part, $f(0) \neq 0$, donc nécessairement $f(0) = 1$. D'autre part, on a $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$ et on sait que $f(x) \neq 0$, ce qui implique que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Pour $x, h \in \mathbb{R}$, on a (en utilisant (3))

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x)\,\frac{f(h) - 1}{h} = f(x)\,\frac{f(h) - f(0)}{h},$$

   la dernière égalité provenant du fait que $f(0) = 1$. Comme f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$, on a $\frac{f(h)-f(0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(0) = a$. Ainsi, la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et vaut $af(x)$. On en déduit que f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et que $f'(x) = af(x)$.

4. En résolvant l'équation différentielle $f' = af$ avec la condition initiale $f(0) = 1$, on trouve alors $f(x) = e^{ax}$. Inversement, il est facile de voir qu'une telle fonction vérifie (3).