Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Corrigé du devoir surveillé n° 2

Vendredi 8 novembre 2013

Exercice 1. (4 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On considère $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}$.

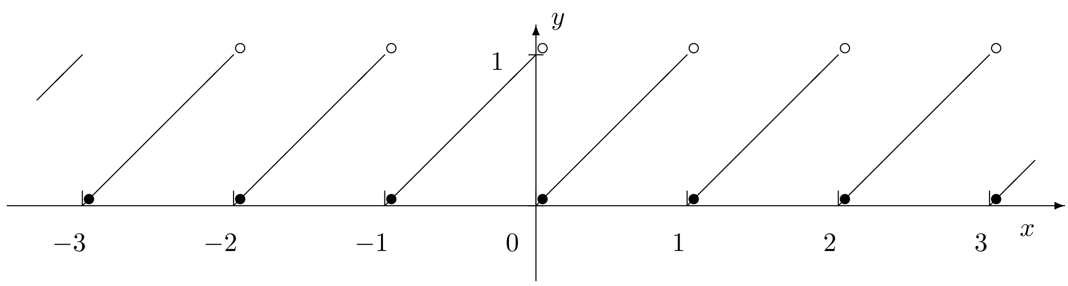
1. La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Dessiner le graphe de f sur $[-3, 3]$.
3. Déterminer deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels qu'on ait simultanément
   (a) $0 \notin I$;
   (b) la fonction $\widetilde{f}\colon \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ soit bien définie ;
   (c) les fonctions $\widetilde{f}$ et f ont la même image ;
   (d) $\widetilde{f}$ est bijective.
4. Donner une formule explicite pour $\widetilde{f}^{-1} : J \to I$.

Corrigé :

1. La fonction f n'est pas injective. En effet, f s'annule sur tous les entiers, donc ne vérifie pas $f(x) \neq f(y)$ si $x \neq y$ (par exemple : $f(0) = 0 = f(1)$ alors que $0 \neq 1$).
   La fonction f n'est pas surjective. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [0, 1[$, donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq y$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (par exemple : $y = 2$ n'est jamais atteint par la fonction f).
   La fonction f n'étant ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.
2. La fonction f prend les valeurs suivantes sur l'intervalle $[-3, 3]$:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \in [-3,-2[, \quad x+2 \text{ si } x \in [-2,-1[, \quad x+1 \text{ si } x \in [-1,0[, \\ x & \text{si } x \in [0,1[, \quad x-1 \text{ si } x \in [1,2[, \quad x-2 \text{ si } x \in [2,3[, \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

   Le graphe de f sur l'intervalle $[-3, 3]$ a l'allure suivante (rappelons que f vaut 0 en tous les entiers) :



3. On peut prendre par exemple l'intervalle $I = [1,2[$ qui ne contient pas 0. Sur cet intervalle, $f(x) = x-1$ et $\{f(x), x \in [1,2[\} = [0,1[= \mathrm{Im}(f)$: on prend $J = [0,1[$ et la fonction $\widetilde{f} : [1,2[\to [0,1[$ définie par $\widetilde{f}(x) = x-1$ est une bijection de I sur J.
4. L'application réciproque de $\widetilde{f} : [0,1[\to [1,2[$ est donnée par $\widetilde{f}^{-1}(y) = y+1$ pour tout $y \in [0,1[$.

Exercice 2. (5 points)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f, g : I \to]0,+\infty[$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in I$, $h(x) = \ln\big(f(x) + \sqrt{g(x)}\big)$.

1. Donner le domaine de dérivabilité de h.
2. Calculer h' en fonction de f, f', g et g'.
3. On considère maintenant $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) := \ln\Big(\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\Big)$. Dériver φ et montrer que $\frac{1}{\varphi'(\sin(t))} = \frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\big(t + \cos(t)\big)$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé :

1. Comme $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et g est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est dérivable sur I comme composée des deux fonctions g et $\sqrt{\cdot}$. De plus, cette fonction $\sqrt{g}$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$. La somme $f + \sqrt{g}$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I (f et $\sqrt{g}$), et pour tout $x \in I$, $f(x) + \sqrt{g(x)} > 0$. On en déduit que la fonction h est dérivable sur I comme composée de la fonction ln dérivable sur $]0,+\infty[$ et de $f + \sqrt{g}$ dérivable sur I et prenant ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
2. D'après la règle des dérivées des fonctions composées, on a
$$(\sqrt{g})'(x) = g'(x) \cdot (\sqrt{\cdot})'(g(x)) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}, \quad \text{pour tout } x \in I.$$
La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, ce qui donne
$$(f + \sqrt{g})'(x) = f'(x) + (\sqrt{g})'(x) = f'(x) + \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}, \quad \text{pour tout } x \in I.$$
Enfin, en remarquant que h est la composée de ln et de $f + \sqrt{g}$, on obtient pour tout $x \in I$
$$h'(x) = (f + \sqrt{g})'(x) \cdot (\ln)'\big((f + \sqrt{g})(x)\big) = \frac{f'(x) + \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}{f(x) + \sqrt{g(x)}} = \frac{f'(x)\sqrt{g(x)} + \frac{1}{2}\, g'(x)}{f(x)\sqrt{g(x)} + g(x)}.$$
3. On est dans le cas précédent en posant $I =]0,1[$, $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = 1 - x^2$ et $h = \varphi$. On vérifie aisément que f, g et I vérifient les hypothèses de la question précédente. On en déduit donc que la fonction φ est dérivable sur $]0,1[$ et
$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x + \sqrt{1-x^2})}, \quad \text{pour tout } x \in]0,1[.$$
D'autre part, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin t \in]0,1[$, $\cos t \in]0,1[$ et :
$$\varphi(\sin t) = \ln\big(t + \sqrt{1 - \sin^2 t}\big) = \ln(t + \cos t),$$
ce qui nous permet, en dérivant l'égalité ci-dessus par rapport à t et en appliquant la règle des dérivées de fonctions composées, d'obtenir
$$\sin' t \cdot \varphi'(\sin t) = \frac{1 - \sin t}{t + \cos t}, \quad \text{pour tout } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$
ou encore :
$$\varphi'(\sin t) = \frac{1 - \sin t}{\cos t(t + \cos t)} = \frac{1 - \sin^2 t}{(1 + \sin t)\cos t(t + \cos t)} = \frac{\cos t}{(1 + \sin t)(t + \cos t)},$$

ce qui était l'égalité demandée, au passage à l'inverse près.
Une autre méthode pour trouver cette dernière formule est bien évidemment de remplacer x par $\sin t$ dans l'expression trouvée pour $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(\sin t) = \frac{1-\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}\big(\arcsin(\sin t) + \sqrt{1-\sin^2 t}\big)}$$

et on conclut comme plus haut.

Exercice 3. (3 points)

On considère la fonction $f : \left(x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$.

1. Donner le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de f ainsi que son domaine de dérivabilité.
2. Calculer f'.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \arctan x + \frac{\pi}{4} = 0.$$

Corrigé :

1. La fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule uniquement aux deux points -1 et 1. Sa dérivée est donnée par :

$$\left(x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}\right)' = -2\,\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}, \quad x \neq \pm 1.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \arctan\big(\frac{2x}{x^2-1}\big)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ comme composée de fonctions dérivables. De même, la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'au point -1. Sa dérivée est donnée par :

$$\left(x \mapsto \frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1.$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto \arctan\big(\frac{x-1}{x+1}\big)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En conclusion, comme somme de fonctions définies et dérivables, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

2. D'après la règle de dérivation des composées de fonctions dérivables, on a pour tout $x \neq -1, 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}\right)' \cdot \arctan'\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) + \left(x \mapsto \frac{x-1}{x+1}\right)' \cdot \arctan'\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big) \\ &= -2\,\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\,\frac{1}{1+\big(\frac{2x}{x^2-1}\big)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}\,\frac{1}{1+\big(\frac{x-1}{x+1}\big)^2} \\ &= \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2+4x^2} + \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} \;=\; -\frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

3. On en déduit donc que sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$, $f(x) = -\arctan x + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer (éventuellement différente sur chacun des intervalles). Sur l'intervalle $]-1,1[$, on peut déterminer c en calculant la valeur en $x=0$:

$$-\frac{\pi}{4} = 0 + \arctan(-1) = \arctan\Big(\frac{2\cdot 0}{0^2-1}\Big) + \arctan\Big(\frac{0+1}{0-1}\Big) = -\arctan 0 + c = c,$$

ce qui donne la relation

$$\arctan\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) + \arctan\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big) = -\arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4. (8 points)

1. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f\colon \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array}$ (b) $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{(1+x^2)^2} \end{array}$ (c) $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \end{array}$.

2. Donner les primitives des fonctions suivantes :

(a) $k\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\sqrt{1+x}} \end{array}$ (on pourra poser $t = \sqrt{1+x}$)

(b) $\ell\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{9+x^2} \end{array}$ (on pourra poser $t = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{3}\right)$).

Corrigé :

1. (a) La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On cherchera donc une primitive sur cet intervalle. On note F la primitive de f qui s'annule en 1. On a, en posant $s = \ln t$ (et donc $\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$),

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln x} s\,\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}\,s^2\right]_0^{\ln x} = \frac{1}{2}\,(\ln x)^2.$$

Remarquons que les autres primitives se déduisent de F par ajout d'une constante, ce qui donne la famille de primitives de f :

$$\left(\int f\right)(x) = \frac{1}{2}\,(\ln x)^2 + c, \quad \text{pour tout } x > 0, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

(b) La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On cherchera donc une primitive sur $\mathbb{R}$. On note G la primitive de g qui s'annule en 0. En posant $u(t) = 1 + t^2$, on remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(t)}{u(t)^2}$. Comme $u(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors, comme $u(0) = 1$,

$$G(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{u'(t)}{u(t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2u(t)}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x^2)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

Les autres primitives se déduisent de G par ajout d'une constante, ce qui donne la famille de primitives de g :

$$\left(\int g\right)(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)} + c, \quad \text{pour tout } x > 0, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

(c) La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On cherchera donc une primitive sur $\mathbb{R}$. On note H la primitive de h qui s'annule en 0. On peut intégrer la fonction h par parties en posant $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$. On a alors $u'(t) = 2t$ et d'après la question précédente, $v(t) = -\frac{1}{2(1+t^2)}$. On obtient

$$H(x) = \int_0^x \frac{t^3}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{2(1+t^2)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour calculer $\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, on remarque que l'on a une forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$ en posant $u(t) = 1 + t^2$, et on obtient

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln u(t)\right]_0^x = \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

ce qui donne la famille de primitives de h :

$$\Big(\int h\Big)(x) = -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, \quad \text{pour tout } x > 0, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

2. (a) La fonction k est définie et continue sur $]-1,+\infty[$. On cherche donc des primitives de k sur cet intervalle. On note K la primitive de k qui s'annule en 0 Le changement de variables proposé donne $t = s^2 - 1$ et $\mathrm{d}t = 2s\,\mathrm{d}s$: lorsque t vaut 0, s vaut 1 et lorsque t vaut x, s vaut $\sqrt{x+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{s^2-1}{s}\,2s\,\mathrm{d}s = 2\int_1^{\sqrt{x+1}} (s^2-1)\,\mathrm{d}s \\ &= \Big[\frac{2s^3}{3} - 2s\Big]_1^{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

pour tout $x > -1$. Les autres primitives de k se déduisent de K par ajout d'une constante, ce qui donne la famille de primitives de k :

$$\Big(\int k\Big)(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + c, \quad \text{pour tout } x > -1, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

On aurait aussi pu remarquer que $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ pour tout $x > -1$ et utiliser les formules des primitives pour les fonctions puissances (non entières, puisqu'il s'agit ici des puissances $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$).

(b) La fonction ℓ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On cherche donc des primitives de ℓ sur cet intervalle. On note L la primitive de ℓ qui s'annule en 0. Le changement de variables suggéré nous donne $t = 3\mathrm{sh}s$ et donc $\mathrm{d}t = 3\mathrm{ch}\,s\,\mathrm{d}s$: lorsque t vaut 0, s vaut 0 et lorsque t vaut x, s vaut $\mathrm{argsh}\left(\frac{x}{3}\right)$. On obtient

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{9+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{argsh}\left(\frac{x}{3}\right)} \sqrt{9+9\mathrm{sh}^2 t}\cdot 3\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t = 9\int_0^{\mathrm{argsh}\left(\frac{x}{3}\right)} \mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Le calcul de $\int \mathrm{ch}^2 s\,\mathrm{d}s$ peut se faire de plusieurs manières (formules de trigonométrie hyperbolique, écriture de $\mathrm{ch}\,s$ en fonction de e^s, ...). On obtient alors

$$\int_0^y \mathrm{ch}^2 s\,\mathrm{d}s = \Big[\frac{1}{4}\mathrm{sh}(2s) + \frac{1}{2}s\Big]_0^y = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,y\,\mathrm{ch}\,y + \frac{1}{2}y,$$

ce qui nous donne, avec $y = \mathrm{argsh}\left(\frac{x}{3}\right)$,

$$L(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2}\mathrm{argsh}\Big(\frac{x}{3}\Big), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Les autres primitives de ℓ se déduisent de L par ajout d'une constante, ce qui donne la famille de primitives de ℓ :

$$\Big(\int \ell\Big)(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2}\mathrm{argsh}\Big(\frac{x}{3}\Big) + c, \quad \text{pour tout } x > -1, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$