Université Aix-Marseille	2013–2014

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ n° 3

Vendredi 6 décembre 2013

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre les exercices 3 et 4.

Exercice 1. (4 pts)

1. Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' + 4y' + 5y = 0$;
   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
   (c) $y'' - 2y' - 2y = 0$.
2. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles, avec condition initiale, suivantes :
   (a) $y''(x) - 4y(x) = e^{4x}$, avec $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = \frac{2}{3}$;
   (b) $y''(x) - 4y(x) = e^{2x}$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

   Les solutions particulières pourront être recherchées parmi deux des familles suivantes :
   i. $y_P(x) = \alpha\, e^{4x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   ii. $y_P(x) = \alpha\, x\, e^{4x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   iii. $y_P(x) = \alpha\, e^{2x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   iv. $y_P(x) = \alpha\, x\, e^{2x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (6pts)

1. En utilisant par exemple des intégrations par parties, calculer une primitive de
   (a) $f(x) := \cos^4 x$;
   (b) $g(x) = x^3 \cos x$.
2. Donner le domaine de définition maximal D de la fonction rationnelle f définie par
$$f(x) := \frac{x^2}{(x+1)(x^2-5x+6)}.$$
   Calculer ensuite les primitives de f sur D.

Exercice 3. (6pts)

Les deux questions dans cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer une primitive de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par
$$g(x) := \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$
   On pourra utiliser l'un des changements de variable proposés :
   i. $t = \operatorname{argsh}(x)$; ii. $t = \arcsin(x)$; iii. $t = x^2$; iv. $t = \sqrt{1+x^2}$.
2. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle
$$\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 1$$
   avec la condition initiale $y(0) = 1$.

TSVP $\Longrightarrow$

Exercice 4. (6 pts)
Dans cet exercice, on se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$(1 - x^2)\big(f(x)\big)^2 = xf'(x) + f(x). \tag{1}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$xy'(x) + 1 = y(x) + x^2. \tag{2}$$
2. On considère f une solution strictement positive de l'équation (1) et on pose $u(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que u est solution de l'équation (2).
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (1).