Université Aix-Marseille 2012–2013

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 3

Mardi 18 décembre 2012

Exercice 1. (7 points)

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle où le calcul est possible, intervalle que l'on précisera :

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$;
2. $f_2(x) = \dfrac{e^x + 4}{e^{2x} + 4}$;
3. $f_3(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 + 6x + 9}$;
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$
(on pourra effectuer le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$).

Exercice 2. (6 points)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = a \sin u_n + b$.

1. Rappeler la formule qui donne $\sin x - \sin y$ en fonction de $\sin(\frac{x-y}{2})$ et $\cos(\frac{x+y}{2})$. En déduire que
$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a : $|u_{n+1} - u_n| \leq |a||u_n - u_{n-1}|$.
En déduire que : $|u_{n+1} - u_n| \leq |a|^n |u_1 - u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication : on pourra faire un raisonnement par récurrence.
3. Soit $0 \leq \alpha < 1$. Après avoir montré le fait que, pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \geq q$, on a
$$\alpha^q + \cdots + \alpha^p = \alpha^q \frac{1 - \alpha^{p-q+1}}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha^q}{1 - \alpha},$$
montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
4. En étudiant une fonction appropriée, montrer que l'équation $\ell = a \sin \ell + b$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}$ (on ne demande pas la valeur de ℓ). En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Exercice 3. (2 points) Que peut-on dire de la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin u_n$, $n \in \mathbb{N}$ (est-elle convergente, et pourquoi ? si oui, vers quoi ?) ?

Corrigé

Exercice 1.

1. Cette intégrale est définie sur des intervalles de $\mathbb{R}$ contenus dans $]0, +\infty[$. En intégrant par parties avec $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = \ln x$, on obtient $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, et donc
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c, \quad x > 0, \text{ où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

2. L'intégrale ici est définie sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. On pose, dans un premier temps, $y = e^x > 0$ (ce qui donne $\frac{1}{y}\,dy = dx$), et on obtient
$$\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4}\,dx = \int \frac{y+4}{y(y^2+4)}\,dy.$$
On doit alors décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{y+4}{y(y^2+4)}$: on vérifie que, pour tout $y > 0$,
$$\frac{y+4}{y(y^2+4)} = \frac{1}{y} + \frac{-y+1}{y^2+4} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\,\frac{2y}{y^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{y}{2})^2+1},$$
ce qui donne pour tout $y > 0$, après avoir remarqué que $y \mapsto 2y$ est la dérivée de $y \mapsto y^2+4$,
$$\int \frac{y+4}{y(y^2+4)}\,dy = \ln y - \frac{1}{2}\,\ln(y^2+4) + \frac{1}{2}\,\arctan\!\big(\frac{y}{2}\big) + c$$
où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. En remplaçant y par e^x, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4}\,dx = x - \frac{1}{2}\,\ln(e^{2x}+4) + \frac{1}{2}\,\arctan\!\big(\frac{e^x}{2}\big) + c.$$

3. L'intégrale ici est définie sur tout intervalle sur lequel le dénominateur de la fraction rationnelle qui définit la fonction à intégrer ne s'annule pas, c'est-à-dire sur tout intervalle ne contenant pas -3 (en effet, on factorise facilement $x^2+6x+9 = (x+3)^2$). On décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples ; on vérifie que pour tout $x \neq -3$, on a
$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$
Ce qui nous donne sur tout intervalle ne contenant pas -3 :
$$\int \frac{2x+5}{x^2+6x+9}\,dx = 2\int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{-1}{(x+3)^2}\,dx = 2\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + c,$$
où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

4. L'intégrale à calculer existe sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, et on a, en faisant le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$ (ce qui donne $t \in \mathbb{R}$ et $dx = \operatorname{ch} t\,dt$) comme indiqué dans l'énoncé :
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} t}{(1+\operatorname{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt;$$
en effet, $1+\operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$ et $\operatorname{ch} t \geq 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $\operatorname{ch} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se rappelle ensuite que $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - \operatorname{th}^2 t$ est la dérivée de $t \mapsto \operatorname{th} t$, ce qui donne finalement, en remplaçant t par $\operatorname{argsh} x$:
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) + c,$$
où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. On peut aussi remarquer que
$$\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
ce qui donne finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c.$$

Exercice 2.

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\sin x - \sin y = 2\cos\!\big(\frac{x+y}{2}\big)\sin\!\big(\frac{x-y}{2}\big)$, ce qui implique, compte tenu des inégalités $|\cos\theta| \leq 1$ et $|\sin\theta| \leq |\theta|$ valables pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$|\sin x - \sin y| \leq 2\cdot\Big|\frac{x-y}{2}\Big| = |x-y|.$$

2. En utilisant l'inégalité de la question précédente, on a immédiatement pour tout $n \geq 1$
$$|u_{n+1} - u_n| = |a(\sin u_n - \sin u_{n-1})| = |a||\sin u_n - \sin u_{n-1}| \leq |a||u_n - u_{n-1}|.$$
On note alors (P_n) la propriété
$$|u_{n+1} - u_n| \leq |a|^n |u_1 - u_0|.$$
On va montrer (P_n) par récurrence.
Initialisation : (P_0) est vérifiée puisque $|a|^0 = 1$, et l'inégalité est en fait une égalité.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété (P_n) soit vérifiée. On a alors, d'après l'inégalité montrée au début de cette question :
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq |a||u_{n+1} - u_n| \overset{\text{d'après } (P_n)}{\leq} |a| \cdot |a|^n |u_1 - u_0| = |a|^{n+1}|u_1 - u_0|.$$
Ceci montre alors que la propriété au rang $n+1$ est elle aussi vérifiée.
Ainsi, on a montré par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $0 \leq \alpha < 1$, soit $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \geq q$. Alors la somme $\alpha^q + \alpha^{q+1} + \cdots + \alpha^p$ représente la somme de $p - q + 1$ terme de la suite géométrique de premier terme α^q, de raison α. On a donc
$$\alpha^q + \alpha^{q+1} + \cdots + \alpha^p = \alpha^q \, \frac{1 - \alpha^{p-q+1}}{1 - \alpha},$$
et comme $0 \leq \alpha^{p-q+1} < 1$, on a $\frac{1-\alpha^{p-q+1}}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$, ce qui donne alors l'inégalité cherchée.
En utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq q$:
$$\begin{aligned}
|u_p - u_q| &= \big|(u_p - u_{p-1}) + (u_{p-1} - u_{p-2}) + \cdots + (u_{q+2} - u_{q+1}) + (u_{q+1} - u_q)\big| \\
&\leq |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \cdots + |u_{q+2} - u_{q+1}| + |u_{q+1} - u_q| \\
&\leq \big(|a|^p + |a|^{p-1} + \cdots + |a|^{q+1} + |a|^q\big)|u_1 - u_0| \\
&\leq \frac{|u_1 - u_0|}{1 - |a|} |a|^q \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$
où on a utilisé la majoration de la question 2 pour la deuxième inégalité et l'inégalité du début de cette question pour la troisième inégalité (car $0 \leq |a| < 1$). Enfin, la convergence vers 0 lorsque p et q tendent vers l'infini provient du fait que $|a| < 1$. On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

4. L'inégalité de la question 1 permet aussi de prouver que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ, alors $(\sin x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sin \ell$. En effet, on a
$$0 \leq |\sin x_n - \sin \ell| \leq |x_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Dans notre cas, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; notons ℓ sa limite. On a alors
$$u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad a \sin u_n + b \xrightarrow[n\to\infty]{} a \sin \ell + b,$$
d'après ce qu'on vient de montrer. Comme $u_{n+1} = a \sin u_n + b$, par unicité de la limite d'une suite convergente, ℓ vérifie nécessairement $\ell = a \sin \ell + b$. Soit f la fonction $f : x \mapsto x - (a \sin x + b)$ définie sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - a \sin x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $|a| < 1$). La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle vaut $-\pi - a \sin b < 0$ en $x = b - \pi$ et $\pi - a \sin b > 0$ en $x = b + \pi$. On en déduit alors que f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, l'unique point y pour lequel $f(y) = 0$ vérifie $b - \pi + < y < b + \pi$. Cela montre que la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique solution de $f(x) = 0$, donc $\ell \in]b - \pi, b + \pi[$. On peut même remarquer que $f\big(b - \frac{\pi}{2}\big) = -\frac{\pi}{2} + a \cos b < 0$ et $f\big(b + \frac{\pi}{2}\big) = \frac{\pi}{2} - a \cos b > 0$ (car $\frac{\pi}{2} > 1$), ce qui nous permet de localiser ℓ dans l'intervalle $\big]b - \frac{\pi}{2}, b + \frac{\pi}{2}\big[$

Exercice 3. Il est facile de voir (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$, ce qui implique que $0 < u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n$: on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; comme de plus elle est minorée par 0, elle est convergente. Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, sa limite ℓ vérifie $\ell = \sin \ell$ et $\ell \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$: la seule possibilité pour ℓ est $\ell = 0$.

En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive, convergente vers 0.

Exercice 4. (8 points)

Dans chacune des questions ci-dessous, seules deux réponses sont exactes. Une réponse juste est créditée de $0,5$ point, deux réponses justes rapportent un point ; 0, 3 ou 4 réponses ne rapportent aucun point, une réponse fausse vaut -0,25 point.

On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
   (b) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
   (c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;
   (d) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

2. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n + v_n = w_n$ et si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée ;
   (c) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0 : u_n \leq \frac{1}{2}$;
   (d) $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \frac{1}{2}\, w_n$.

3. Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors
   (a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
   (b) $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$;
   (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;
   (d) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

4. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors
   (a) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   (c) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
   (d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

5. Soit A l'ensemble $\left\{\frac{1}{1+x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}\right\}$.
   (a) A est borné ;
   (b) $\inf A > 0$;
   (c) $\sup A = 1$;
   (d) le complémentaire de A est $[1, +\infty[$.

6. Soit B l'ensemble $\left\{1 + \frac{1}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (a) $B \cap [0,1] = \emptyset$;
   (b) B n'a pas de borne supérieure ;
   (c) $\inf B \in B$;
   (d) $\inf B \leq 1$.

7. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{1+x^2}$.
   (a) f est injective ;
   (b) $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y$;
   (c) $\forall\, a \in \mathbb{R},\ f^{-1}\big(\{a\}\big)$ a un élément et un seul ;
   (d) f n'est pas bijective.

8. Soit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$.
   (a) g ne s'annule pas ;
   (b) g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$;
   (c) g est surjective ;
   (d) g est injective.

Réponses du QCM

1. (b) et (c) ; 2. (a) et (c) ; 3. (b) et (c) ; 4. (c) et (d) ; 5. (a) et (c) ; 6. (a) et (d) ; 7. (a) et (c) ; 8. (a) et (d).