Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Corrigé du devoir surveillé n° 3

Vendredi 6 décembre 2013

Exercice 1.

1. Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' + 4y' + 5y = 0$;
   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
   (c) $y'' - 2y' - 2y = 0$.
2. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles, avec condition initiale, suivantes :
   (a) $y''(x) - 4y(x) = e^{4x}$, avec $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = \frac{2}{3}$;
   (b) $y''(x) - 4y(x) = e^{2x}$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

   Les solutions particulières pourront être recherchées parmi deux des familles suivantes :
   i. $y_P(x) = \alpha\, e^{4x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   ii. $y_P(x) = \alpha\, x\, e^{4x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   iii. $y_P(x) = \alpha\, e^{2x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   iv. $y_P(x) = \alpha\, x\, e^{2x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corrigé.

1. (a) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle proposée est

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

dont les deux racines complexes conjuguées sont $-2 \pm i$. Ainsi, d'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont données par

$$y(x) = e^{-2x}(\alpha \cos x + \beta \sin x),$$

où α et β sont des constantes réelles.

(b) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle proposée est

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

dont l'unique racine réelle double est 3. Ainsi, d'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont données par

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{3x},$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

(c) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle proposée est

$$r^2 - 2r - 2 = 0$$

dont les deux racines réelles sont $1 \pm \sqrt{3}$. Ainsi, d'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont données par

$$y(x) = \lambda e^{(1+\sqrt{3})x} + \mu e^{(1-\sqrt{3})x},$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

2. (a) L'équation homogène associée à l'équation différentielle proposée est $y'' - 4y = 0$ dont les solutions sont données par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$ (les racines de son équation caractéristique sont $r = \pm 2$). On choisit de chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = \alpha e^{4x}$: y_P est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve $y_P'(x) = 4\alpha e^{4x}$ et $y_P''(x) = 16\alpha e^{4x}$. Ce qui donne, en utilisant l'équation différentielle, $(16-4)\alpha e^{4x} = e^{4x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou encore $\alpha = \frac{1}{12}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle complète (avec second membre) sont donc de la forme

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} + \frac{1}{12}\, e^{4x},$$

avec λ et μ des constantes réelles. Comme $y(0) = \frac{1}{4}$ et $y'(0) = \frac{2}{3}$, λ et μ doivent vérifier les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu + \frac{1}{12} & = & \frac{1}{4} \\ 2\lambda - 2\mu + \frac{1}{3} & = & \frac{2}{3}. \end{array} \right.$$

Ce qui donne $\lambda = \frac{1}{6}$ et $\mu = 0$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{1}{6}\, e^{2x} + \frac{1}{12}\, e^{4x}$.

(b) Comme dans la question précédente, l'équation homogène associée à l'équation différentielle proposée est $y'' - 4y = 0$ dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont données par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$. On choisit de chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = \alpha\, x\, e^{2x}$: y_P est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve $y_P'(x) = \alpha(2x+1)e^{2x}$ et $y_P''(x) = \alpha(4x+4)e^{2x}$. Ce qui donne, en utilisant l'équation différentielle, $4\alpha\, e^{2x} = e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou encore $\alpha = \frac{1}{4}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle complète (avec second membre) sont donc de la forme

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} + \frac{1}{4}\, x\, e^{2x},$$

avec λ et μ des constantes réelles. Comme $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$, λ et μ doivent vérifier les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ 2\lambda - 2\mu + \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Ce qui donne $\lambda = \frac{1}{16}$ et $\mu = -\frac{1}{16}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{1}{4}\, x\, e^{2x} = \frac{1}{8}\big(\mathrm{sh}(2x) + 2x\, e^{2x}\big)$.

Exercice 2.

1. En utilisant par exemple des intégrations par parties, calculer une primitive de
   (a) $f(x) := \cos^4 x$;
   (b) $g(x) = x^3 \cos x$.
2. Donner le domaine de définition maximal D de la fonction rationnelle f définie par

$$f(x) := \frac{x^2}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)}.$$

Calculer ensuite les primitives de f sur D.

Corrigé.

1. (a) Il y a plusieurs façons de calculer une primitive de f.

Solution 1 : On commence par linéariser $\cos^4(x)$ en écrivant

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

On peut alors trouver une primitive directement et donner $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $F(x) := \frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3x}{8} = \frac{1}{32}\big(\sin(4x)+8\sin(2x)+12x\big)$ comme primitive de f.

Solution 2 : On commence par linéariser $\cos^4(x)$ en utilisant la formule de duplication :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \big(\cos^2(x)\big)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\big(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)\big)\\ &= \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

La suite est identique à ce qui précède.

Solution 3 : On commence par donner une primitive sous forme intégrale

$$F(x) = \int_0^x \cos^4(t)dt, \qquad x\in\mathbb{R}$$

que l'on intègre ensuite par partie en écrivant $\cos^4(t) = r(t)s'(t)$ avec $r(t) := \cos^3(t)$ et $s(t) = \sin(t)$. Cela donne

$$\begin{aligned}F(x) &= \big[\cos^3(t)\sin(t)\big]_0^x + 3\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)dt = \cos^3(x)\sin(x)+3\int_0^x \cos^2(t)\big(1-\cos^2(t)\big)dt\\ &= \cos^3(x)\sin(x)+3\int_0^x\cos^2(t)dt - 3F(x).\end{aligned}$$

On en déduit que $F(x) = \frac{1}{4}\cos^3(x)\sin(x)+\frac{3}{4}\int_0^x\cos^2(t)dt$. Là encore, on peut soit dire que

$$\int_0^x \cos^2(t)dt = \int_0^x \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{4}\big[2t+\sin(2t)\big]_0^x = \frac{1}{4}\big(2x+\sin(2x)\big)\ ;$$

soit dire que

$$\begin{aligned}H(x) &:= \int_0^x \cos^2(t)dt = \int_0^x \cos(t)\sin'(t)dt = \big[\cos(t)\sin(t)\big]_0^x + \int_0^x \sin^2(t)dt\\ &= \cos(x)\sin(x)+\int_0^x dt - H(x),\end{aligned}$$

et donc $\int_0^x\cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\big(\cos(x)\sin(x)+x\big) = \frac{1}{4}\big(2x+\sin(2x)\big)$. Dans les deux cas, on obtient

$$F(x) = \frac{1}{4}\cos^3(x)\sin(x)+\frac{3}{16}\big(2x+\sin(2x)\big).$$

Exercice : vérifier que $\frac{1}{16}\left(4\cos^3(x)\sin(x)+3\sin(2x)\right) = \frac{1}{32}\big(\sin(4x)+8\sin(2x)\big)$

(b) On commence par écrire une primitive sous forme intégrale

$$G(x) := \int_0^x t^3\cos(t)dt.$$

En intégrant plusieurs fois par parties, on obtient alors

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^x t^3 \sin'(t)dt \;=\; \big[t^3\sin(t)\big]_0^x - 3\int_0^x t^2\sin(t)dt \\
&= x^3\sin(x) + 3\int_0^x t^2\cos'(t)dt \;=\; x^3\sin(x) + 3\big[t^2\cos(t)\big]_0^3 - 6\int_0^x t\cos(t)dt \\
&= x^3\sin(x) + 3x^2\cos(x) - 6\int_0^x t\sin'(t)dt \;=\; x^3\sin(x) + 3x^2\cos(x) - 6\big[t\sin(t)\big]_0^x + 6\int_0^x \sin(t)dt \\
&= x^3\sin(x) + 3x^2\cos(x) - 6x\sin(x) - 6\big[\cos(t)\big]_0^x \;=\; x^3\sin(x) + 3x^2\cos(x) - 6x\sin(x) - 6\cos(x) + 6.
\end{aligned}$$

Par souci de simplicité, on pourra donc donner $\widetilde{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{G} := x^3\sin(x) + 3x^2\cos(x) - 6x\sin(x) - 6\cos(x)$$

comme primitive de g.

2. Le dénominateur de la fonction rationnelle f se factorise en $(x-1)(x-2)(x-3)$, donc s'annule aux points 1, 2 et 3. Le domaine de définition maximal de f est donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\} =]-\infty, 1[\cup]1,2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$. Sur cette réunion d'intervalles, le numérateur étant de degré strictement plus petit que le dénominateur, f se décompose en éléments simples de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3},$$

où a, b, c sont des réels à déterminer. Pour trouver a, on multiplie l'expression par $x-1$, puis on donne à x la valeur 1, ce qui nous permet d'obtenir $\frac{1^2}{(1-2)(1-3)} = a$, et donc $a = \frac{1}{2}$. Pour trouver b, on multiplie l'expression par $x-2$, puis on donne à x la valeur 2, ce qui nous permet d'obtenir $\frac{2^2}{(2-1)(2-3)} = b$ et donc $b = -4$. Enfin, pour trouver c, on multiplie l'expression par $x-3$, puis on donne à x la valeur 3, ce qui nous permet d'obtenir $\frac{3^2}{(3-1)(3-2)} = c$ et donc $c = \frac{9}{2}$. On a alors $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - 4\frac{1}{x-2} + \frac{9}{2}\frac{1}{x-3}$ et donc les primtives de f sur D sont toutes de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1-x) - 4\ln(2-x) + \frac{9}{2}\ln(3-x) + k_1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2}\ln(x-1) - 4\ln(2-x) + \frac{9}{2}\ln(3-x) + k_2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}\ln(x-1) - 4\ln(x-2) + \frac{9}{2}\ln(3-x) + k_3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ \frac{1}{2}\ln(x-1) - 4\ln(x-2) + \frac{9}{2}\ln(x-3) + k_4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

où $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ sont quatre constantes réelles.

Exercice 3.

Les deux questions dans cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer une primitive de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) := \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

On pourra utiliser l'un des changements de variable proposés :
i. $t = \operatorname{argsh}(x)$; ii. $t = \arcsin(x)$; iii. $t = x^2$; iv. $t = \sqrt{1+x^2}$.

2. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle

$$\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 1$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Corrigé.

1. On écrit une primitive sous forme intégrale $\left(x \mapsto \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt\right)$ et on fait le changement de variables $s = \sqrt{1+t^2} > 1$. Ce changement de variable est licite car $(t \mapsto \sqrt{1+t^2})$ est bijectif dérivable de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$, de réciproque $(s \mapsto \sqrt{s^2-1})$ également dérivable. De plus, on a $dt = d(\sqrt{1-s^2}) = -\frac{s}{\sqrt{1-s^2}} ds$. Cela donne
$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} \frac{s^2}{s^2-1}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} \frac{s^2-1+1}{s^2-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} \left(1 - \frac{1}{1-s^2}\right)\mathrm{d}s \\
&= \left[s - \operatorname{argth}\frac{1}{s}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{car } s > 1) \\
&= \sqrt{1+x^2} - \operatorname{argth}\left((\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \sqrt{2} + \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$
Par souci de simplicité, on pourra donner $G(x) := \sqrt{1+x^2} - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ comme primitive de g. En utilisant l'expression explicite de argth, on peut même simplifier G en $G(x) = \sqrt{1+x^2} + \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$.
Remarque : d'autres changements de variables fonctionnaient également.
2. L'équation différentielle proposée est linéaire non homogène à coefficients non constants. L'équation différentielle homogène associée est donnée par $y' + ay = 0$ avec $a :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $a(x) = \tan x$. Une primitive A de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donnée par $A(x) = \ln(\cos x)$ (en effet, $\cos x > 0$ lorsque $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc données par $y(x) = \lambda \cos x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ une constante). Pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle proposée, on peut utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche y_P une solution particulière sous la forme $y_P(x) = \lambda(x) \cos x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, où $\lambda :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable : λ doit vérifier $\lambda'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \tan' x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $y_P(x) = \sin x$ est une solution particulière. Les solutions de l'équation différentielle proposée dans lénoncé sont données par
$$y(x) = \lambda \cos x + \sin x, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$
Comme $y(0) = 1$, ceci impose $\lambda = 1$ et donc la solution cherchée est $y(x) = \cos x + \sin x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Remarque : la restriction à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ provient de la méthode utilisée pour résoudre l'équation différentielle. La solution que l'on trouve est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; de plus, elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4.
Dans cet exercice, on se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant
$$(1-x^2)\big(f(x)\big)^2 = xf'(x) + f(x). \tag{1}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$xy'(x) + 1 = y(x) + x^2. \tag{2}$$
2. On considère f une solution strictement positive de l'équation (1) et on pose $u(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que u est solution de l'équation (2).

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (1).

Corrigé.

1. L'équation différentielle (2) est linéaire du premier ordre à coefficients non constants. Son équation homogène associée est $xy'(x) - y(x) = 0$: pour mettre cette équation sous la forme du cours $y' + ay = 0$, on doit diviser par x, et donc on se restreindra aux intervalles de $\mathbb{R}$ où x ne s'annule pas. On étudie l'équation différentielle sur $]-\infty, 0[$, puis sur $]0, +\infty[$. Les solutions sont données par $y(x) = \lambda x$ si $x < 0$ et $y(x) = \mu x$ si $x > 0$: on peut "recoller" deux solutions sur $\mathbb{R}$ en choisissant $\lambda = \mu$ et $y(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il reste à trouver une solution particulière de (2) : on peut la chercher sous la forme d'un polynôme de degré 2. On vérifie aisément que $y_P(x) = x^2 + 1$ est solution de (2). Ainsi, toutes les solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ sont données par $y(x) = x^2 + \lambda x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.
2. (a) Si f est solution de (1), c'est qu'elle est dérivable. La fonction u est donc dérivable car quotient de fonctions dérivables. On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}$.

   (b) Par calcul direct, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xu'(x) + 1 = 1 - \frac{xf'(x)}{\big(f(x)\big)^2} = 1 - \frac{(1-x^2)\big(f(x)\big)^2 - f(x)}{\big(f(x)\big)^2} = x^2 + \frac{1}{f(x)} = u(x) + x^2.$$

   La fonction u est donc solution de l'équation (2).
3. Soit f une solution du problème. D'après la question 2., on sait que $\frac{1}{f}$ est solution de l'équation (2), et donc, d'après la question 1., qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{f(x)} = x^2 + \lambda x + 1$. Or, la fonction $\frac{1}{f}$ ne s'annule pas. Il doit donc en être de même de la fonction polynômiale du second degré $(x \mapsto x^2 + \lambda x + 1)$. Son discriminant valant $\lambda^2 - 4$, il faut donc $|\lambda| < 2$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+\lambda x+1}$.

   Réciproquement, un calcul direct montre que, pour toute fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x^2+\lambda x+1}\right)$, avec $\lambda \in]-2, 2[$, est bien solution du problème.