Université Aix-Marseille	2012–2013

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Mardi 15 janvier 2013

Exercice 1.

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle où le calcul est possible, intervalle que l'on précisera :

1. $f_1(x) = \sqrt{e^x - 4}$ (on pourra effectuer le changement de variable $x = \ln(t^2 + 4)$ avec $t \geq 0$).
2. $f_2(x) = \dfrac{2x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

Exercice 2.

1. Exprimer les quantités $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\tan x$.
2. Calculer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin^4 x}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (on pourra effectuer le changement de variable $x = \arctan t$).

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 13x^2 - 38x + 40. \tag{1}$$

1. Trouver une solution particulière y_P de (1) (suggestion : chercher un polynôme de deuxième degré).
2. Trouver la solution générale de (1).
3. Déterminer la solution de (1) qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$.

Exercice 4.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme $a_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{2}{3}\, a_n + \frac{1}{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est rationnel et $a_n > 0$.
2. En étudiant la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \dfrac{2}{3}\, t + \dfrac{1}{t}$, $t > 0$, déduire que $a_n \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $a_n \leq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
5. Cette suite est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
6. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Qu'a-t-on montré dans cet exercice ?