Université Aix-Marseille 2013–2014

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Jeudi 16 janvier 2014

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1, 2 et 3, l'autre les exercices 4, 5 et 6.

Exercice 1. (3 pts)
Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{3\,x^2-2\,x-x^3}$.

Exercice 2. (5 pts)
Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant

$$\begin{aligned} &y'' - 2my' + y = 0, \\ &y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = m + \sqrt{|m^2-1|}. \end{aligned}$$

On pourra distinguer trois cas selon les valeurs de m.

Exercice 3. (5 pts)
Soit $\alpha \geq 0$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \alpha, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $\alpha \in [0,1]$, et que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $\alpha \in]1, +\infty[$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. On suppose dans cette question que $\alpha \in [0,1]$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
   (b) Résoudre l'équation $x^2 - x + 1 = x$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de ℓ.

Exercice 4. (6 pts)
Le but de cet exercice est de déterminer les racines du polynôme $x^3 - 3x + 1$. Pour cela, on pose

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3-3x+1 \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-2,2] \\ t & \longmapsto & 2\cos(t) \end{array}.$$

1. (a) Calculer $f(2)$ et $f(-2)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.

   (c) Montrer que toutes les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont comprises entre -2 et 2.

2. (a) Déterminer un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que φ restreinte à I soit une bijection.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos(3t) + 1 = 0$.
   (c) Résoudre dans I l'équation $2\cos(3t) + 1 = 0$.
3. (a) Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(3t)$ en fonction de $\cos(t)$.
   (b) Exprimer $f\big(\varphi(t)\big)$ en fonction de $\cos(3t)$.
   (c) Exprimer les racines de $x^3 - 3x + 1$ à l'aide de la fonction cosinus.

Exercice 5. (4 pts)

1. Donner le domaine de définition maximal dans $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.
2. Par exemple en exhibant sa réciproque, montrer que la fonction $\varphi :]-1,1[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ définie par $\varphi(t) = 2 \arctan(t)$ est une bijection dérivable dont la réciproque est dérivable.
3. Montrer, pour tout $t \in]-1,1[$, l'identité
$$\cos\big(2 \arctan(t)\big) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
4. En utilisant un changement de variables, trouver une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6. (2pts)

Montrer, en revenant à la définition de limite, que la suite $\left(\frac{1-3n}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -3.