Université Aix-Marseille 2012–2013

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 4

Mardi 15 janvier 2013

Exercice 1.

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle où le calcul est possible, intervalle que l'on précisera :

1. $f_1(x) = \sqrt{e^x - 4}$ (on pourra effectuer le changement de variable $x = \ln(t^2 + 4)$ avec $t \geq 0$).
2. $f_2(x) = \dfrac{2x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

Exercice 2.

1. Exprimer les quantités $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\tan x$.
2. Calculer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin^4 x}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (on pourra effectuer le changement de variable $x = \arctan t$).

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 13x^2 - 38x + 40. \tag{1}$$

1. Trouver une solution particulière y_P de (1) (suggestion : chercher un polynôme de deuxième degré).
2. Trouver la solution générale de (1).
3. Déterminer la solution de (1) qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$.

Exercice 4.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme $a_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{2}{3}\,a_n + \frac{1}{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est rationnel et $a_n > 0$.
2. En étudiant la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \dfrac{2}{3}\,t + \dfrac{1}{t}$, $t > 0$, déduire que $a_n \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $a_n \leq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
5. Cette suite est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
6. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Qu'a-t-on montré dans cet exercice ?

Corrigé

Exercice 1.

La fonction f_1 est bien définie et continue aux points $x \in \mathbb{R}$ tels que $e^x - 4 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in [2\ln 2, +\infty[$. On pourra donc chercher une primitive de f_1 sur tout intervalle de $[2\ln 2, +\infty[$. En posant $t = \sqrt{e^x - 4}$ (possible si $x \in [2\ln 2, +\infty[$), ou encore $x = \ln(t^2 + 4)$ (et donc $dx = \frac{2t}{t^2+4}\,dt$), on obtient

$$\begin{aligned} \int f_1 &= \int \sqrt{e^x - 4}\,dx = \int \frac{2t^2}{t^2+4}\,dt = \int \Big(2 - \frac{2}{(\frac{t}{2})^2 + 1}\Big)\,dt \\ &= 2t - 4\arctan\big(\tfrac{t}{2}\big) + c = 2\sqrt{e^x - 4} - 4\arctan\big(\tfrac{\sqrt{e^x-4}}{2}\big) + c, \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer en fonction de la valeur de la primitive cherchée de f_1 en un point.

Le dénominateur de la fraction rationnelle f_2 s'annule en 0 (pôle simple) et en 3 (pôle double). On pourra donc trouver une primitive de f_2 sur un intervalle contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\} =]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, +\infty[$. La fraction rationnelle f_2 (dont la partie entière est nulle) se décompose en éléments simples de la manière suivante :

$$\frac{2x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^3}.$$

On trouve a, b, c par notre méthode préférée. Par exemple, d'abord multiplier par x, puis prendre la valeur en $x = 0$, ce qui donne $a = -1$; ensuite, multiplier par $(x-3)^2$, puis prendre la valeur en $x = 3$, ce qui donne $c = -1$; enfin, multiplier par x et prendre la limite quand x tend vers l'infini, ce qui donne $b = 1$. On obtient alors sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$:

$$\begin{aligned} \int f_2 &= \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{-1}{(x-3)^2}\,dx \\ &= -\ln|x| + \ln|x-3| + \frac{1}{x-3} + c, \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer en fonction de la valeur de la primitive cherchée de f_2 en un point.

Exercice 2.

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan x$ est bien définie, $\cos x \neq 0$ et

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}.$$

   De plus, on a

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

2. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin x \neq \pm 1$ et

$$1 - \sin^4 x = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) = \cos^2 x(1 + \sin^2 x) \neq 0.$$

   On peut poser $t = \tan x$ (ou encore $x = \arctan t$), ce qui donne $dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$ et donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 - \sin^4 x}\,dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x(1 + \sin^2 x)}\,dx = \int \frac{1 + t^2}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \int \frac{1 + t^2}{1 + 2t^2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}t)^2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + c, \end{aligned}$$

   où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer en fonction de la valeur de la primitive cherchée en un point.

Exercice 3.

1. On cherche y_P qui satisfait à (1) sous la forme d'un polynôme du second degré, donc de la forme $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à déterminer. La fonction y_P est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ autant de fois que l'on veut et on a
$$y_P'(x) = 2ax + b \quad \text{et} \quad y_P''(x) = 2a, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
En reportant dans l'équation (1), les coefficients a, b, c doivent vérifier
$$13ax^2 + (13b - 12a)x + 13c - 6b + 2a = 13x^2 - 38x + 40 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$
ou encore
$$(13a - 13)x^2 + (13b - 12a + 38)x + 13c - 6b + 2a - 40 = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc nécessairement a, b, c doivent vérifier le système
$$\begin{cases} 13a - 13 &= 0 \\ 13b - 12a + 38 &= 0 \\ 13c - 6b + 2a - 40 &= 0, \end{cases}$$
ce qui donne donc $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$ et on vérifie facilement que le polynôme y_P défini par $y_P(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, est solution de (1).

2. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée à (1) est $r^2 - 6r + 13 = 0$; elle possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3 + 2i$ et $r_2 = 3 - 2i$. Ainsi, la solution générale de l'équation homogène associée à (1) est de la forme
$$z(x) = e^{3x}\big(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x\big), \quad x \in \mathbb{R},$$
où λ et μ sont des constantes réelles à déterminer en fonction des conditions initiales.
On en déduit alors la forme générale des solutions de (1) (solution particulière y_P à laquelle on ajoute la solution générale z de l'équation homogène associée) :
$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + e^{3x}\big(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x\big), \quad x \in \mathbb{R},$$
où λ et μ sont des constantes réelles à déterminer en fonction des conditions initiales.

3. Enfin, on cherche y solution de (1) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$: cela revient à déterminer λ et μ dans la forme générale de y donnée à la question précédente afin d'obtenir $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$. On a
$$0 = y(0) = 2 + \lambda \quad \text{et} \quad -2 = y'(0) = -2 + 3\lambda + 2\mu,$$
ce qui implique alors que $\lambda = -2$ et $\mu = 3$. Ainsi, la solution y de (1) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$ est définie par
$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + e^{3x}\big(-2 \cos 2x + 3 \sin 2x\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. On vérifie par récurrence que $a_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété
$$\text{“}a_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad a_n > 0.\text{”}$$
Initialisation : La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $a_0 = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ et $a_0 = \frac{3}{2} > 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Alors $0 < \frac{2}{3}\, a_n \in \mathbb{Q}$ car le produit de deux rationnels strictement positifs est rationnel strictement positif. De plus, $0 < \frac{1}{a_n} \in \mathbb{Q}$ car l'inverse d'un rationnel strictement positif est un rationnel strictement positif. Ici, on a par deux fois utilisé l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: $0 < a_n \in \mathbb{Q}$. Enfin, la somme de deux rationnels strictement positifs est un rationnel strictement positif : cela donne alors $0 < a_{n+1} = \frac{2}{3}\, a_n + \frac{1}{a_n} \in \mathbb{Q}$, ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{2}{3}\,t + \frac{1}{t}$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée vaut $f'(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$. Ainsi, f est décroissante sur $\left]0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, croissante sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$; elle atteint son minimum en $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$: ce minimum vaut $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   On voit facilement que $a_0 = \frac{3}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la question 1, $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $a_{n+1} = f(a_n) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ceci montre donc que $a_n \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrons par récurrence que $a_n \leq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{Q}(n)$ la propriété "$a_n \leq \sqrt{3}$".

   Initialisation : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie ; en effet, $a_0 = \frac{3}{2} \leq \sqrt{3}$ car $\sqrt{3} \leq 2$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. On a alors $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a_n \leq \sqrt{3}$ (la première inégalité a été montrée à la question précédente, la deuxième inégalité provient de l'hypothèse de récurrence). Or f est est décroissante sur $\left]0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$; donc

   $$a_{n+1} = f(a_n) \leq \max\left\{f\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), f(\sqrt{3})\right\} = \sqrt{3},$$

   ce qui montre $\mathcal{Q}(n+1)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}\,a_n + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{3}\,a_n = \frac{1}{3a_n}\left(3 - a_n^2\right) \geq 0,$$

   car $0 < a_n \leq \sqrt{3}$ implique que $a_n^2 \leq 3$, et donc $3 - a_n^2 \geq 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée (par $\sqrt{3}$) ; elle est donc convergente. On note ℓ sa limite. De l'encadrement $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a_n \leq \sqrt{3}$, on déduit que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \ell \leq \sqrt{3}$; en particulier, $\ell \neq 0$. Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. On sait aussi que la suite $\left(\frac{2}{3}\,a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2}{3}\,\ell$. Ceci montre alors que la suite $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, comme somme de deux suites convergentes, converge vers $\frac{1}{\ell} + \frac{2}{3}\,\ell$. D'autre part, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ; on en déduit alors que $\ell \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]$ vérifie

   $$\frac{1}{\ell} + \frac{2}{3}\,\ell = \ell.$$

   L'unique possibilité est alors $\ell = \sqrt{3}$.

6. La méthode pour montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel est la même que pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On fait un raisonnement par l'absurde, en supposant qu'on peut écrire $\sqrt{3}$ comme une fraction $\frac{p}{q}$ de deux entiers p et q premiers entr'eux. On a alors $p^2 = 3q^2$, donc p^2 est divisible par 3.

   - Si $p = 3k + 1$, avec k entier, on a $p^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, qui n'est donc pas divisible par 3.
   - Si $p = 3k + 2$, avec k entier, on a $p^2 = 3(3k^2 + 6k + 1) + 1$, qui n'est pas divisible par 3 non plus.

   La seule possibilité est donc que p est un multiple de 3 : $p = 3k$ avec k entier. Mais alors l'égalité $p^2 = 3q^2$ devient $3k^2 = q^2$, qui implique, comme plus haut, que q est un multiple de 3 : ceci contredit le fait que p et q sont premiers entr'eux.

   Dans cet exercice, on a donc construit une suite de rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sqrt{3}$ qui n'est pas rationnel.