Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 4

Jeudi 16 janvier 2014

Exercice 1.
On a $3x^2-2x-x^3=-x(x^2-3x+2)=-x(x-1)(x-2)$ et $\deg(1)<\deg(3x^2-2x-x^3)$. On en déduit qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{3x^2-2x-x^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{a}{x-2}$. En multipliant le tout par, respectivement, x, $x-1$ et $x-2$, puis en évaluant en, respectivement, 0, 1 et 2, on trouve $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$ et $c=-\frac{1}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{3x^2-2x-x^3}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x-4}$ dont les primitives sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto\begin{cases}\ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{x(x-2)}}\right)+A & \text{si } x<0\\ \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}\right)+B & \text{si } 0<x<1\\ \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}\right)+C & \text{si } 1<x<2\\ \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}\right)+D & \text{si } 2<x\end{cases}$$

avec $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ quatre constantes réelles.

Exercice 2. L'équation différentielle, que l'on notera (E), est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique (e) est $z^2-2mz+1=0$ dont le discriminant vaut $\Delta:=4(m^2-1)$.

Si $|m|>1$: alors $\Delta>0$ et les solutions de (e) sont $m\pm\sqrt{m^2-1}$. Les solutions de (E) sont alors les fonctions de la forme $y(x)=e^{mx}(Ae^{\sqrt{m^2-1}x}+Be^{-\sqrt{m^2-1}x})$ avec $A,B\in\mathbb{R}$. On a alors $y'(x)=e^{mx}\big((m+\sqrt{m^2-1})Ae^{\sqrt{m^2-1}x}+(m-\sqrt{m^2-1})Be^{-\sqrt{m^2-1}x}\big)$ La condition $y(0)=1$ impose donc $A+B=1$ et la condition $y'(0)=m+\sqrt{|m^2-1|}$ impose $(m+\sqrt{m^2-1})A+(m-\sqrt{m^2-1})B=m+\sqrt{m^2-1}$. Cela impose $A=1$ et $B=0$ et la seule solution est donc $y(x)=e^{(m+\sqrt{m^2-1})x}$.

Si $|m|=1$: alors $\Delta=0$ et (e) admet m comme solution double. Les solutions de (E) sont alors les fonctions de la forme $y(x)=(A+Bx)e^{mx}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$. On a alors $y'(x)=(mA+B+mBx)e^{mx}$. La condition $y(0)=1$ impose donc $A=1$ et la condition $y'(0)=m+\sqrt{|m^2-1|}$ impose $mA+B=m$. Cela impose $A=1$ et $B=0$ et la seule solution est donc $y(x)=e^{mx}$.

Si $|m|<1$: alors $\Delta<0$ et les solutions de (e) sont $m\pm i\sqrt{1-m^2}$. Les solutions de (E) sont alors les fonctions de la forme $y(x)=e^{mx}\big(A\cos(\sqrt{1-m^2}x)+B\sin(\sqrt{1-m^2}x)\big)$ avec $A,B\in\mathbb{R}$. On a alors $y'(x)=e^{mx}\big((mA+\sqrt{1-m^2}B)\cos(\sqrt{1-m^2}x)+(mB-\sqrt{1-m^2}A)\sin(-\sqrt{m^2-1x})\big)$ La condition $y(0)=1$ impose donc $A=1$ et la condition $y'(0)=m+\sqrt{|m^2-1|}$ impose $mA+\sqrt{1-m^2}B=m+\sqrt{1-m^2}$. Cela impose $A=1$ et $B=1$ et la seule solution est donc $y(x)=e^{mx}\big(\cos(\sqrt{1-m^2}x)+\sin(\sqrt{1-m^2}x)\big)$.

Exercice 3.

1. Supposons d'abord que $\alpha\in[0,1]$ et montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

   Cas initial : le résultat est vrai pour $n=0$ car $u_0=\alpha\in[0,1]$.

   Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang n, on a alors $u_n\in[0,1]$ et donc $0\le u_n^2\le u_n$, ce qui donne $-1\le -u_n\le u_n^2-u_n\le 0$ ou encore $0\le u_n^2-u_n+1=u_{n+1}\le 1$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

Supposons maintenant que $\alpha > 1$ et montrons le résultat toujours par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Cas initial : le résultat est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = \alpha > 1$.

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang n, on a alors $u_n > 1$ et donc $u_n < u_n^2$, ce qui donne $0 \leq u_n^2 - u_n$ ou encore $1 < u_n^2 - u_n + 1 = u_{n+1}$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$. La suite est donc croissante.
3. (a) La suite est croissante d'après la question 2. et bornée par 1 d'après la question 1. Elle est donc convergente.

   (b) On a $x^2 - x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Par produit de suites convergentes, la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ, et par somme de suites convergentes, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_n^2 - u_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^2 - \ell + 1$. Mais cette dernière suite converge aussi vers ℓ. Par unicité de la limite, on a donc $\ell^2 - \ell + 1 = \ell$ et d'après ce qui précède, on a $\ell = 1$.

Exercice 4.

1. (a) On a $f(2) = 3$ et $f(-2) = -1$.

   (b) La fonction f est polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ négative entre -1 et 1 et positive partout ailleurs. De plus, ona $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{\infty} f(x) = \infty$. On en déduit que f est strictement croissante de $-\infty$ à 3sur $]-\infty, -1]$, puis strictement décroissante de 3 à -1sur $[-1, 1]$, puis de nouveau strictement croissante de -1 à $+\infty$ sur $[1, +\infty[$.

   (c) Sur $]-\infty, -2]$, la fonction f est croissante de $-\infty$ à $f(-2) = -1$. Elle reste donc strictement négative et ne peut pas s'annuler. De même, sur $[2, +\infty[$, elle est croissante de 3 à $+\infty$. Elle est donc strictement positive et ne peut pas s'annuler. Les seuls zéros de la fonction f ne peuvent donc être que sur $]-2, 2[$.
2. (a) La fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que, par exemple, φ est une bijection de $I := [0, \pi]$ sur $[-2, 2]$.

   (b) On a

$$\begin{aligned}
2\cos(3t) + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos 3t = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 3t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{(6k+2)\pi}{9} \text{ ou } t = \frac{(6k-2)\pi}{9} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

   Les solutions de l'équation sont donc les réels $\frac{k\pi}{9}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ congru à 2 ou -2 modulo 6.

   (c) Parmi les solutions de la question précédente, on cherche celles qui sont comprises entre 0 et π. Il faut alors ou bien $0 \leq 6k - 2 \leq 9$, ou bien $0 \leq 6k + 2 \leq 9$. On trouve au final comme solutions $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$ et $\frac{8\pi}{9}$.
3. (a) On a $\cos(3t) = \cos(t+2t) = \cos(t)\cos(2t) - \sin(t)\sin(2t) = \cos(t)\big(2\cos^2(t) - 1\big) - 2\sin^2(t)\cos(t) = \cos(t)\big(2\cos^2(t) - 1\big) + 2(\cos^2 - 1)\cos(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$.

   (b) On a $f\big(\varphi(t)\big) = \big(2\cos(t)\big)^3 - 6\cos(t) + 1 = 2\big(4\cos^3(t) - 3\cos(t)\big) + 1 = 2\cos(3t) + 1$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. D'après la question 1.(c), on a $x \in [-2, 2]$. On peut donc considérer $t := \varphi^{-1}(x) \in I$. On a alors $0 = f(x) = f\big(\varphi(t)\big) = 2\cos(3t) + 1$. D'après la question 2.(c), on a donc $t \in \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right\}$ et de fait $x \in \left\{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right\}$. En remontant les calculs, on montre que ce sont effectivement les trois racines (distinctes et réelles) de f.

Exercice 5.

1. La fonction f est définie dès lors que la fonction cosinus ne s'annule pas. Elle est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. La fonction φ admet l'application $\left(x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ comme application réciproque. De plus, elle peut être prolongée par continuité en 1 et en -1 avec $\varphi(1) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi(-1) = -\frac{\pi}{2}$. C'est donc une bijection de $]-1, 1[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par composition de fonctions dérivables, φ et φ^{-1} sont également dérivables.
3. On a $\cos\big(2\arctan(t)\big) = 2\cos^2\big(\arctan(t)\big) - 1$. Or, pour tout $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\cos^2(\alpha} = 1 + \tan^2(\alpha)$. Cela donne donc $\cos\big(2\arctan(t)\big) = \frac{2}{1+\tan^2\big(\arctan(t)\big)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
4. On note comme primitive de f la fonction

$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\cos(x)};$$

On considère, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le changement de variable $s = \varphi^{-1}(t)$ qui est bien licite d'après la question 2. On a alors $t = \varphi(x)$ et donc $dt = \frac{2ds}{1+s^2}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2ds}{\cos\big(2\arctan(s)\big)(1+s^2)} = 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(1+s^2)ds}{(1-s^2)(1+s^2)} \\ &= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{ds}{(1-s^2)} = 2\Big[\operatorname{argth}(s)\Big]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2\operatorname{argth}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right). \end{aligned}$$

Exercice 6.

On note u la suite. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - (-3)| = \left|\frac{1-3n}{1+n} + 3\right| = \left|\frac{1-3n+3+3n}{1+n}\right| = \left|\frac{4}{1+n}\right| = \frac{4}{1+n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N := \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor$. Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$n \geq N = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor > \frac{4}{\varepsilon} - 1$$

et donc $\frac{n+1}{4} > \frac{1}{\epsilon}$, ce qui donne, puisque $\frac{1}{\epsilon} > 0$,

$$|u_n - (-3)| = \frac{4}{1+n} < \varepsilon.$$

La suite u converge donc bien vers -3.