Corrigé de l'exercice 9 de la planche 3

On veut trouver la valeur de

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}}\,dx.$$

On remarque d'abord que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$, puis que $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$. L'intégrale I devient alors

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin(2x)}}\,dx.$$

En faisant le changement de variable $t = x - \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos 2t}}\,dt.$$

En effet, $\sin 2x = \sin\big(2(t+\frac{\pi}{4})\big) = \sin(2t+\frac{\pi}{2}) = \cos 2t$. En remarquant enfin que $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$, on a $1 + \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{3}{2} - \sin^2 t$, ce qui donne

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{\frac{3}{2}-\sin^2 t}}\,dt.$$

On pose maintenant $y = \sin t$ et on obtient

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}-y^2}}\,dy.$$

Pour terminer, il reste à poser $z = \sqrt{\frac{2}{3}}\,y$, et on peut calculer I :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\arcsin z\big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$