

Introduction à l'analyse

Interrogation de cours 2

1. Donner toutes les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + y = 2 \cosh 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. On note  $f$  la solution de  $(E)$  qui vaut 2 en 0. Étudier la fonction  $f$ .

La factorisation suivante pourra être utile au cours du raisonnement :

$$X^4 - 4X + 3 = (X - 1)^2(X^2 + 2X + 3).$$

**Réponse :**

1. D'après le cours, la solution générale de l'équation homogène associée à  $(E)$  est de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de  $(E)$ , on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme  $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable. En remplaçant dans  $(E)$ ,  $\lambda$  doit vérifier  $\lambda'(x) = e^{3x} + e^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ; on peut donc prendre  $\lambda(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - e^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi, une solution particulière de  $(E)$  est  $y_0(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - e^{-2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . La solution générale de  $(E)$  est alors (d'après le cours) :

$$y(x) = \lambda e^{-x} + y_0(x) = \lambda e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} - e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. La solution  $f$  de  $(E)$  qui vaut 2 en 0 est de la forme trouvée au à la question 1. où  $\lambda$  doit vérifier  $\lambda + \frac{1}{3} - 1 = 2$ . Ainsi,  $\lambda = \frac{8}{3}$  et donc

$$f(x) = \frac{8}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} - e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On trouve comme dérivée de  $f$  :

$$f'(x) = -\frac{8}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} + 2e^{-2x} = \frac{2}{3}e^{-2x}(-4e^x + e^{4x} + 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il faut maintenant étudier de signe de  $f'$  : en utilisant la factorisation donnée dans l'énoncé (en posant  $X = e^x$ ), on obtient :

$$f'(x) = \frac{2}{3}e^{-2x}(e^x - 1)^2(e^{2x} + 2e^x + 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ceci donne alors le tableau de variations suivant pour  $f$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'$	+	
$f$	$-\infty$	$+\infty$

En effet, il est facile de voir que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et en utilisant l'expression de  $f$  suivante

$$f(x) = -e^{-2x}\left(1 - \frac{1}{3}e^{4x} - \frac{8}{3}e^x\right),$$

on voit aussi que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ .