Introduction à l'analyse

Interrogation de cours 2

1. Donner l'expression de toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' - y = 2\sinh 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. On note f la solution de (E) qui s'annule en 0. Étudier la fonction f.

   La factorisation suivante pourra être utile au cours du raisonnement :
$$3X^4 - 2X^3 - 1 = (X-1)(3X^3 + 3X^2 + 1).$$

Réponse :

1. D'après le cours, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est de la forme
$$y(x) = \lambda e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Pour trouver une solution particulière de (E), on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$, où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. En remplaçant dans (E), λ doit vérifier $\lambda'(x) = e^x - e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on peut donc prendre $\lambda(x) = e^x + \frac{1}{3}e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, une solution particulière de (E) est $y_0(x) = e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de (E) est alors (d'après le cours) :
$$y(x) = \lambda e^x + y_0(x) = \lambda e^x + e^{2x} + \tfrac{1}{3}e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. La solution f de (E) qui s'annule en 0 est de la forme trouvée au 1. où λ doit vérifier $\lambda + 1 + \frac{1}{3} = 0$. Ainsi, $\lambda = -\frac{4}{3}$ et donc
$$f(x) = -\tfrac{4}{3}\,e^x + e^{2x} + \tfrac{1}{3}\,e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
On trouve comme dérivée de f :
$$f'(x) = -\tfrac{4}{3}\,e^x + 2e^{2x} - \tfrac{2}{3}\,e^{-2x} = \tfrac{2}{3}\,e^{-2x}\big(-2e^{3x} + 3e^{4x} - 1\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Il faut maintenant étudier de signe de f' : en utilisant la factorisation donnée dans l'énoncé (en posant $X = e^x$), on obtient :
$$f'(x) = \tfrac{2}{3}\,e^{-2x}(e^x - 1)\big(3e^{3x} + 3e^{2x} + 1\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Ceci donne alors le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, il est facile de voir que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et en utilisant l'expression de f suivante
$$f(x) = e^{2x}\big(-\tfrac{4}{3}e^{-x} + 1 + \tfrac{1}{3}e^{-4x}\big),$$
on voit aussi que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.