Introduction à l'analyse

Interrogation de cours 2 - sujet 1

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction arctan et donner l'expression de sa dérivée.

   La fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. *On en déduit :*

   $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

3. (a) Mettre $x^2+4x+13$ sous la forme $(x+a)^2+b^2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

   $x^2+4x+13 = (x+2)^2-4+13 = (x+2)^2+3^2$

   (b) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2+3^2}\,dx \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{en posant } t = \frac{x+2}{3},\ dt = \frac{1}{3}\,dx, \\
&= \frac{1}{3}\arctan t + c, \qquad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante}, \\
&= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + c.
\end{aligned}$$

Interrogation de cours 2 - sujet 2

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction argsh et donner l'expression de sa dérivée.

   La fonction argument sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. *On en déduit :*

   $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsh} x + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

3. (a) Mettre $x^2 - 2x + 10$ sous la forme $(x+a)^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

   $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 - 1 + 10 = (x-1)^2 + 3^2$

   (b) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, \qquad \text{en posant } t = \frac{x-1}{3},\ dt = \frac{1}{3}\,dx, \\
&= \operatorname{argsh} t + c, \qquad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante,} \\
&= \operatorname{argsh}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c.
\end{aligned}$$