Université Aix-Marseille 2012–2013

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

LES EXERCICES AUXQUELS VOUS AVEZ ÉCHAPPÉ DANS LE DS N°3

Lundi 17 décembre 2012

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1. (i) Donner les valeurs de u_0 et u_1.

   (ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. On note maintenant $v_n = u_{n+2} + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Montrer que $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ? Et si oui, quelle est sa limite ?

3. (i) En intégrant v_n par parties, montrer que $(n+2)u_{n+2} + (n+1)u_n = \sqrt{2}$.

   (ii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.

   (iii) En utilisant 2.(ii) et 3.(ii), montrer que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. Les questions 1 et 2 sont indépendantes. La troisième question utilise les résultats des deux premières questions.

1. (i) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

   (ii) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

   (i) Écrire la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

   (ii) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(\arctan u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

3. (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On note x_n cette solution. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n - n\pi = \arctan x_n.$$

   (ii) Donner la valeur de x_0 et montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

   (iii) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite. Montrer que : $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

   (iv) En utilisant 1.(i), montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\arctan \dfrac{1}{x_n}$.

   En utilisant 2.(ii), en déduire que : $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   (v) En utilisant 1.(ii) et 3.(iv), montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$1 - \frac{n\pi}{x_n} \leq n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big) + 1 \leq 1 - \frac{n\pi}{x_n}\big(1 - \frac{1}{3x_n^2}\big).$$

   En déduire que

$$n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.$$