Université Aix-Marseille 2012–2013

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Les exercices auxquels vous avez échappé dans le DS n°3

Lundi 17 décembre 2012

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

1. (i) Donner les valeurs de u_0 et u_1.

   (ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. On note maintenant $v_n = u_{n+2} + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Montrer que $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ? Et si oui, quelle est sa limite ?

3. (i) En intégrant v_n par parties, montrer que $(n+2)u_{n+2} + (n+1)u_n = \sqrt{2}$.

   (ii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.

   (iii) En utilisant 2.(ii) et 3.(ii), montrer que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. Les questions 1 et 2 sont indépendantes. La troisième question utilise les résultats des deux premières questions.

1. (i) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

   (ii) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

   (i) Écrire la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

   (ii) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(\arctan u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

3. (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On note x_n cette solution. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n - n\pi = \arctan x_n.$$

   (ii) Donner la valeur de x_0 et montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

   (iii) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite. Montrer que : $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

   (iv) En utilisant 1.(i), montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\arctan \dfrac{1}{x_n}$.

   En utilisant 2.(ii), en déduire que : $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   (v) En utilisant 1.(ii) et 3.(iv), montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$1 - \frac{n\pi}{x_n} \leq n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big) + 1 \leq 1 - \frac{n\pi}{x_n}\big(1 - \frac{1}{3x_n^2}\big).$$

   En déduire que

$$n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.$$

Corrigé

Exercice 1.

Cet exercice faisait partie d'un sujet du bac S, 1995.

1. (i) Rappelons que $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $\operatorname{argsh} 0 = 0$ et $\operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$. On a

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \big[\operatorname{argsh} x\big]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}),$$

et

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \big[\sqrt{1+x^2}\big]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

(ii) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. Ainsi, comme les inégalités sont conservées par intégration, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n\, dx \leq u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1},$$

ce qui donne l'encadrement demandé. Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on déduit du théorème d'encadrement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, minorée et majorée par deux suites convergentes vers 0, est elle aussi convergente vers 0.

2. (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^n + x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^n(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = x^n\sqrt{1+x^2},$$

ce qui implique que

$$v_n = u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\, dx,$$

ce qui est la formule cherchée.

(ii) Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^{n+1} \leq x^n$. Les intégrales conservant les inégalités (sur un intervalle bien orienté), on obtient

$$v_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1+x^2}\, dx \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\, dx = v_n,$$

et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Il est aussi facile de voir que $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée : elle est convergente. Pour montrer la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pouvait aussi remarquer que cette suite était somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ toutes deux convergentes vers 0, ce qui implique alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

3. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'intégrale qui définit v_n, on pose $f'(x) = x^n$ et $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, ce qui donne $f(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$ et $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+2} = v_n \quad &= \quad \Big[\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\ &= \quad \frac{1}{n+1}\,\sqrt{2} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{1}{n+1}\,\sqrt{2} - \frac{1}{n+1}\, u_{n+2}. \end{aligned}$$

En multipliant l'égalité précédente par $n+1$, on obtient

$$(n+1)u_n + (n+2)u_{n+2} = \sqrt{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui est la relation cherchée.

(ii) Comme dans 2.*(ii)*, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^{n+1} \leq x^n$. En intégrant entre 0 et 1, on obtient alors

$$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = u_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} \leq u_n$; en reportant dans la relation du 3.*(i)*, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(2n+3)u_{n+2} = (n+2)u_{n+2} + (n+1)u_{n+2} \leq (n+2)u_{n+2} + (n+1)u_n = \sqrt{2}.$$

En posant $n' = n+2$, on obtient pour tout $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq 2$: $(2n'-1)u_{n'} \leq \sqrt{2}$. D'autre part, on a pour $n' = 0$: $(2\cdot 0 - 1)u_0 = -\ln(1+\sqrt{2}) \leq \sqrt{2}$ et pour $n' = 1$: $(2\cdot 1 - 1)u_1 = \sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2}$. La relation $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$ est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Les inégalités prouvées en 2.*(ii)* et 3.*(ii)* donnent l'encadrement suivant pour u_n :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Ici, on ne considère que les $n \geq 1$ afin de pouvoir diviser l'inégalité par $2n-1 > 0$. Cela implique alors que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \xleftarrow[\infty\leftarrow n]{} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})\sqrt{2}} = \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par le théorème d'encadrement, on déduit donc que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2.

1. *(i)* On étudie la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Cette fonction, comme somme et composée de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, est dérivable sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée en un point $x > 0$ quelconque vaut

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0.$$

On en déduit alors que f est constante sur $]0,+\infty[$:

$$f(x) = f(1) = 2\arctan 1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } x > 0,$$

ce que l'on cherchait.

(ii) On étudie sur $[0,+\infty[$ les deux fonctions g et h définies par

$$g(x) = x - \arctan x \quad \text{et} \quad h(x) = \arctan x - \big(x - \frac{x^3}{3}\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que g et h sont croissantes sur $\mathbb{R}$. En particulier, cela implique que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$ et $h(x) \geq h(0) = 0$, ce qui donne la double inégalité cherchée :

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

2. (i) La convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 s'écrit de la manière suivante (voir votre cours) :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall\,n\geq n_0\ :\ |u_n|<\varepsilon.$$

(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors on peut écrire la définition précédente en remplaçant ε par $\tan\varepsilon$ (en se limitant aux $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$) ; on obtient alors

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n_0(\tan\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall\,n\geq n_0\ :\ -\tan\varepsilon<u_n<\tan\varepsilon.$$

La fonction arctangente étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et impaire), la dernière inégalité implique

$$-\varepsilon=-\arctan(\tan\varepsilon)=\arctan(-\tan\varepsilon)<\arctan u_n<\arctan(\tan\varepsilon)=\varepsilon,$$

ce qui équivaut à $|\arctan u_n|<\varepsilon$, et donc par définition : $\arctan u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. (i) Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$ par $f(x)=\tan x-x$ est dérivable, de dérivée $f'(x)=1+\tan^2 x-1=\tan^2 x\geq 0$ (f' ne s'annule qu'en 0) : f est donc (strictement) croissante entre $-\frac{\pi}{2}+n\pi$ et $\frac{\pi}{2}+n\pi$ et $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\frac{\pi}{2}+n\pi]{}\pm\infty$. On en déduit que f s'annule une et une seule fois entre $-\frac{\pi}{2}+n\pi$ et $\frac{\pi}{2}+n\pi$ en x_n. On a alors $x_n-n\pi\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et comme la fonction tangente est π-périodique,

$$\tan(x_n-n\pi)=\tan x_n=x_n.$$

En appliquant la fonction arctangente à cette dernière égalité, on obtient :

$$x_n-n\pi=\arctan(\tan(x_n-n\pi))=\arctan x_n.$$

En effet, rappelons que $\arctan(\tan y)=y$ si, et seulement si, $y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(ii) On voit facilement que $x_0=0$: $\tan 0=0$ et d'après le raisonnement ci-dessus, f ne s'annule qu'une seule fois entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. D'autre part, comme $f(n\pi)=-n\pi\leq 0$, on peut localiser x_n entre $n\pi$ et $\frac{\pi}{2}+n\pi$.

(iii) On vient de montrer que $n\pi\leq x_n\leq\frac{\pi}{2}+n\pi$, ce qui donne, en divisant par $n\pi$,

$$1\leq\frac{x_n}{n\pi}\leq\frac{1}{2n}+1\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite $\left(\frac{x_n}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1.

(iv) Pour tout $n\geq 1$, $x_n>0$. Donc pour tout $n\geq 1$, d'après 1.(i), on a $\arctan x_n+\arctan\frac{1}{x_n}=\frac{\pi}{2}$, ou encore :

$$\arctan x_n-\frac{\pi}{2}=-\arctan\frac{1}{x_n}$$

En utilisant l'égalité montrée en 3.(i), cela donne

$$x_n-n\pi-\frac{\pi}{2}=\arctan x_n-\frac{\pi}{2}=-\arctan\frac{1}{x_n},\quad \text{pour tout } n\geq 1.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée (en effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $n\pi\leq x_n<\frac{\pi}{2}+n\pi$), elle diverge donc vers $+\infty$. Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (c'est du cours). En utilisant la question 2.(ii), on sait alors que la suite $\left(\arctan(\frac{1}{x_n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, en utilisant l'égalité montrée juste ci-dessus, on obtient :

$$x_n-n\pi-\frac{\pi}{2}=-\arctan\frac{1}{x_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

(v) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On écrit la double inégalité montrée au 1.(ii) pour $x = \frac{1}{x_n} \geq 0$ et on obtient :

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{3x_n^3} \leq \arctan \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{x_n}.$$

En utilisant l'égalité montrée au 3.(iv), on a alors

$$-\frac{1}{x_n} \leq x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \leq -\frac{1}{x_n}\left(1 - \frac{1}{3x_n^2}\right),$$

ce qui devient, après avoir multiplié par $n\pi$ et ajouté 1 :

$$1 - \frac{n\pi}{x_n} \leq 1 + n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big) \leq 1 - \frac{n\pi}{x_n}\left(1 - \frac{1}{3x_n^2}\right), \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

D'après 3.(iii), $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc $\frac{n}{x_n} = \frac{1}{\frac{x_n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1} = 1$. On a aussi déjà vu que $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (voir 3.(iv)). On a alors

$$1 - \frac{n\pi}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{n\pi}{x_n}\left(1 - \frac{1}{3x_n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, la suite $\Big(1 + n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, de limite 0, ce qui revient à dire que

$$n\pi\big(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.$$