Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP

Introduction à l'analyse

Planche 1 - Fonctions usuelles

Logique et applications.

Exercice 1.

1. En posant les notations nécessaires, traduire en langage mathématique l'affirmation suivante :
   "Toutes les voitures du parking de l'université sont rouges"
   puis écrire sa négation.
2. Ecrire la négation de "$\forall a \in A, \exists b \in B, a+b \in B$".
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$. Donner, en la justifiant, la valeur de x.

Exercice 2. Donner les domaines de définition maximale dans $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\big(\sqrt{(x)}\big) \qquad g : x \mapsto \ln\big(\exp(x)\big)$$
$$h : x \mapsto \sqrt{\cos(x)} \qquad k : x \mapsto \big(\ln(x)\big)^{\sin(x)}$$

Exercice 3.

1. On considère les applications suivantes :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{2^n}{n+1} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 3n \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$
   Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n)$, $(f \circ h)(n)$, $(k \circ f)(n)$, $(k \circ f \circ g)(n)$ et $(k \circ f \circ h \circ g)(n)$.
2. On considère les applications
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}.$$
   Montrer que $g \circ f = -g$.

Fonctions trigonométriques.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition géométrique du cosinus et du sinus.
2. (a) Justifier géométriquement que $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer l'ensemble des x tels que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$.
3. (a) Justifier géométriquement que $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ et $\sin(x-y)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(y)$.

(c) En déduire $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.

4. (a) Pour tout x qui convient, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ et une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

5. Pour tous p et q, montrer les formules

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

6. Montrer que, avec $t = \tan\frac{x}{2}$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a

$$\cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \tfrac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \tfrac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 5. Résoudre les équations

$$\begin{array}{ll} \cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = -1 & \tan 3x = \tan x \\ \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 1 & \cos^4(x) + \sin^4(x) = 1. \end{array}$$

Exercice 6. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan, on note O l'origine, A l'intersection du cercle unité avec le demi-axe des abscisses positives et M le point du cercle unité tel que la demi-droite $[OA)$ forme un angle de mesure x avec le demi-axe des abscisses positives. On note encore B le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et C le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par A. En comparant l'aire du triangle OBM, l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle OAC, montrez que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice 7. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que

$$1 + \tan^2 x = \tfrac{1}{\cos^2 x}.$$

Fonction ln et fonction exp.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}} \qquad\qquad 2^{2x+1} - 3^x = 3^{x+1} - 2^{2x}.$$

Exercice 9. En étudiant deux fonctions, montrez l'inégalité suivante, due à Neper :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \tfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$$

Exercice 10.

1. Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

2. En déduire que pour tout $\alpha, \beta > 1$, on a $\sqrt{\ln(\alpha)\ln(\beta)} \leq \ln\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)$.

Fonctions hyperboliques.

Exercice 11.

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, calculer $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)$, $\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ et $\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.
2. En déduire des expressions de $\mathrm{ch}(x+y)$, $\mathrm{ch}(x-y)$, $\mathrm{sh}(x+y)$ et $\mathrm{sh}(x-y)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(y)$ et $\mathrm{sh}(y)$.
3. En déduire des expressions pour $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y)$, $\mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y)$ et $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(y)$.
4. Montrer que, avec $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Fonction exponentielle complexe.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $e^{ix} := \cos x + i \sin x$.

Exercice 12. Déduire de la formule $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ les formules de duplication pour cos et sin obtenues dans l'exercice 4.

Exercice 13. Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A\cos x + B\sin x = r\cos(x-\varphi).$$

Exercice 14. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx, \qquad \sin x + \cdots + \sin nx.$$

Exercice 15. En utilisant les mêmes formules de définition que dans le cas réel, calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(ix)$ et $-i\mathrm{sh}(ix)$. En déduire les formules de l'exercice 4 à l'aide des formules de l'exercice 11.