Université Aix-Marseille	2013–2014

Parcours PEIP
Introduction à l'analyse

PLANCHE 2 - FONCTIONS RÉCIPROQUES

Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}.$$

Exercice 2.

1. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{x^2+1} \end{array}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Montrer que la fonction $g : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est bijective.

Exercice 3. Soit A, B et C trois ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications et on note $h = g \circ f : A \to C$ l'application composée.

1. Montrer que f et g sont injectives, alors h est injective.
2. Montrer que f et g sont surjectives, alors h est surjective.
3. Montrer que h est injective, alors f est injective.
4. Montrer que h est surjective, alors g est surjective.

Fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 4. Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Calculer

$$\begin{array}{ll} 1)\ \arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right) & 2)\ \arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) \\ 3)\ \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) & 4)\ \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) \end{array}.$$

Exercice 6. Calculer pour tout x tel que ce soit défini

$$\begin{array}{ll} 1)\ \cos\big(\arccos(x)\big) & 2)\ \sin\big(\arcsin(x)\big) \\ 3)\ \cos\big(\arcsin(x)\big) & 4)\ \sin\big(\arccos(x)\big) \\ 5)\ \cos\big(\arctan(x)\big) & 6)\ \sin\big(\arctan(x)\big) \\ 7)\ \tan\big(\arccos(x)\big) & 8)\ \tan\big(\arcsin(x)\big) \end{array}.$$

Exercice 7.

1. Exprimer différemment $\arctan a + \arctan b$ pour $a, b > 0$ tq que $ab < 1$.
2. Calculer $2\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{13}\right)$.
3. Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

Fonctions hyperboliques réciproques.

Exercice 8. Montrer que,

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
2. pour tout $x \geq 1$, $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$;
3. pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 9.

1. Montrer que, pour tout $x \in [1, \infty[$, on a $\operatorname{sh}\big(\operatorname{argch}(x)\big) = \sqrt{x^2-1}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}\big(\operatorname{argsh}(x)\big) = \sqrt{x^2+1}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{ch}\big(\operatorname{argth}(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\operatorname{sh}\big(\operatorname{argth}(x)\big) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) + \operatorname{argth}(x) = \operatorname{argch}\big(\sqrt{2-x^2}\big)$.

Exercice 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\alpha_x := \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

1. Montrer que $0 \leq \alpha_x < \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $1 + \tan^2(\alpha_x) = \operatorname{ch}^2(x)$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a $\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = \arctan\big(\operatorname{sh}(x)\big)$.