Université Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'analyse

Parcours PEIP

Planche 3 Techniques d'intégration

Exercice 1. En intégrant par parties, calculer les primitives de

1. $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$,
2. $g : x \mapsto \sin x \sinh x$,
3. $h : x \mapsto x \arctan x$.

On précisera à chaque fois dans quel domaine la primitive trouvée est valide.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'expression

$$I_n = \int x\,(\ln x)^n\,dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner l'expression de I_n à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3. En effectuant le changement de variable indiqué, calculer les primitives suivantes (on précisera dans quel domaine les calculs effectués sont valides) :

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx$ (poser $x^3+1=t^2$),
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^3+1)^2}\,dx$ (poser $t=x^3+1$),
3. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$ (poser $t=e^x$).

Exercice 4. Par des changements de variables bien choisis, trouver les primitives :

1. $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}\,dx$ (poser $t=\cos x$),
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x+\cos 3x}\,dx$ (poser $t=\sin x$),
3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ (poser $t=\tan\frac{t}{2}$),
4. $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,dx$ (poser $t=\tan\frac{t}{2}$).

Exercice 5.

1. En intégrant par parties, déterminer une primitive de $x \mapsto x \arctan x$.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^5 \arctan x^3$.

Exercice 6. Déterminer les primitives des fonctions suivantes (dans chaque cas, on propose un changement de variable) :

1. $x \mapsto (x^2+4)^{-\frac{5}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra poser $t = \arctan \frac{x}{2}$),
2. $x \mapsto (4-x^2)^{-\frac{5}{2}}$ sur $]-2,2[$ (on pourra poser $t = \arcsin \frac{x}{2}$),
3. $x \mapsto (x^2-4)^{-\frac{5}{2}}$ sur $]2,+\infty[$ et sur $]-\infty,-2[$ (on pourra poser $t = \operatorname{argsh} \frac{x}{2}$).

Exercice 7.

1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{1+X^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$.

Exercice 8.

1. Déterminer la partie entière de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^5+1}{X^2+3X+2}$.
2. Décomposer F en éléments simples.
3. En déduire l'expression d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^5+1}{x^2+3x+2}$.

Exercice 9. Soit I et J les intégrales définies par

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}}\,dx.$$

1. Montrer que $I = J$ (on pourra poser, dans J, $u = \frac{\pi}{2} - x$).
2. Calculer I (en remarquant que $I = \frac{1}{2}(I+J)$).

Exercice 10. On veut calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}\,dx$.

1. Trouver $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\sqrt{f(t)^2+2} = f(t)+t$.
2. Dans I, effectuer le changement de variable $x = f(t)$ (on fera attention aux bornes d'intégration).
3. Calculer I (à l'aide de décomposition de fractions rationnelles en éléments simples).