

**Parcours PEIP**  
**Introduction à l'analyse**

PLANCHE 3 - DÉRIVÉES, PRIMITIVES

**Dérivées.**

**Exercice 1.** S'entraîner à dériver des fonctions (voir planche 3bis).

**Exercice 2.** En dérivant, montrez les égalités suivantes :

1.  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}$  pour tout  $x \neq 0$ .
2.  $2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x \in ]0, 1]$ .
3.  $x \cdot \text{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = |x| \ln|x|$  pour tout  $x \neq 0$ .
4.  $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2 \arcsin(x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ .

**Exercice 3.**

1. Montrer que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \text{sh } x + \ln(\text{ch } x)$  est une bijection. Que vaut  $f^{-1}(0)$  ?
2. Calculer la dérivée de sa fonction réciproque  $f^{-1}$  en 0.

**Primitives.**

**Exercice 4.** Calculer, par des changements de variables, les primitives suivantes :

1.  $\int \cos(3x)dx$  ;
2.  $\int e^{-x}dx$  ;
3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$  ;
4.  $\int \frac{dx}{5x-2}$  ;
5.  $\int \frac{dx}{5+3x^2}$  ;
6.  $\int \frac{3xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$  ;
7.  $\int \frac{3dx}{\sqrt{1-4x^2}}$  ;
8.  $\int \cos^4(x) \sin(x)dx$ .

**Exercice 5.** Calculer, à l'aide des changements de variables proposés, les primitives suivantes :

1.  $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ , avec  $x^3 + 1 = t^2$  ;
2.  $\int \frac{1}{x(x^3+1)^2} dx$ , avec  $t = x^3 + 1$  ;
3.  $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1} dx$ , avec  $t = e^x$  ;
4.  $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x} dx$ , avec  $t = \cos x$  ;
5.  $\int \frac{1}{\cos x + \cos 3x} dx$ , avec  $t = \sin x$  ;
6.  $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ , avec  $t = \tan \frac{x}{2}$  ;
7.  $\int \frac{1}{(2+\cos x)^2} dx$ , avec  $t = \tan \frac{x}{2}$  ;
8.  $\int (x^2 + 4)^{-\frac{5}{2}} dx$  avec  $t = \text{argsh } \frac{x}{2}$  ;
9.  $\int (4 - x^2)^{-\frac{5}{2}} dx$ , avec  $t = \arcsin \frac{x}{2}$  ;
10.  $\int (x^2 - 4)^{-\frac{5}{2}} dx$ , avec  $t = \text{argch } \frac{x}{2}$ .

**Exercice 6.** Calculer, en intégrant par parties, les primitives suivantes :

1.  $\int x \cos(x)dx$
2.  $\int x^2 e^x dx$
3.  $\int \ln(x)dx$
4.  $\int x^2 \ln(x)dx$
5.  $\int e^x \cos(x)dx$
6.  $\int x \arctan(x)dx$
7.  $\int \arcsin^2(x)dx$
8.  $\int \sin(x)\text{sh}(x)dx$

**Exercice 7.**

1. Décomposer la fraction rationnelle  $\frac{1}{1+X^4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ , puis sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire l'expression d'une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ .

**Exercice 8.**

1. Déterminer la partie entière de la fraction rationnelle  $F = \frac{X^5 + 1}{X^2 + 3X + 2}$ .
2. Décomposer  $F$  en éléments simples.
3. En déduire l'expression d'une primitive de  $x \mapsto \frac{x^5 + 1}{x^2 + 3x + 2}$ .

**Exercice 9.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f_n$  la primitive

$$f_n = \int x (\ln x)^n dx.$$

1. Calculer  $f_0$  et  $f_1$ .
2. Trouver une relation entre  $f_{n+1}$  et  $f_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Donner l'expression de  $f_n$  à l'aide de fonctions usuelles.