Université Aix-Marseille 2012–2013

Parcours PEIP

Introduction à l'analyse

Planche 5 : Nombres réels. Suites réelles.

Nombres réels.

Exercice 1. Mettre sous forme irréductible p/q les rationnels suivants (les chiffres soulignés se répètent indéfiniment) :

$$0,11\underline{1}\ldots \qquad 0,23\underline{23}\ldots \qquad 0,142857\underline{142857}\ldots \qquad 0,99\underline{9}\ldots$$

Exercice 2. Montrez que, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \qquad \min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Exercice 3. Dessiner l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

a. $\max(|x|,|y|) \leq 1$.

b. $|x|+|y| \leq 1$.

Exercice 4.

1. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, avec B majorée et $A \subset B$. Montrer que A est majorée et que sup(A) $\leq$ sup(B).
2. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Soit $A+B = \{x+y,\ (x,y) \in A \times B\}$. Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$? de $\sup(A+B)$?

Exercice 5. Soient E un ensemble et f, g deux applications de E dans $\mathbb{R}$ telles que $f(E)$ et $g(E)$ soient des parties majorées de $\mathbb{R}$. On note $\sup f$ la borne supérieure de l'ensemble $f(E)$. Que peut-on dire de $\sup(f+g)$?

Exercice 6. Dire si les ensembles suivants admettent une borne supérieure et ou borne inférieure. Les calculer le cas échéant.

1. $[-1,1[\cup\{2\}$
2. $\left\{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{R}_+^\star\right\}$
3. $\left\{1-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+^\star\right\}$
4. $([-2,2[\cup\{3\}) \cap \{-1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} | k \in \mathbb{N}\}$
5. $\{x^2+y^2 | (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy \leq 1\}$
6. $\{(-1)^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$
7. $\{n+\frac{1}{p}; (n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2\}$

Exercice 7. Soit x un réel. On définit $E(x)$ par:

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

a. Calculer $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$.

b. Tracer le graphe de la fonction E.

c. Calculer $\lim nE\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Démontrer que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

e. En déduire un encadrement de $E(x)$ en fonction de x.

f. Soit $x \in \mathbb{R}$; calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(nx)}{n}.$$

Récurrence.

Exercice 8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $n^3 - n$ est divisible par 3.

(b) pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ $(1+a)^n \geq 1 + na$.

(c) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Suites réelles.

Exercice 9. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

a. La suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

b. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.

c. La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple. Dans tout l'exercice $(u_n)_n$ désigne une suite réelle.
a. Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_n$ est décroissante.
b. Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle est convergente.
c. Si $(|u_n|)_n$ converge vers l, alors $(u_n)_n$ converge vers l ou vers $-l$.
d. Si $\lim u_n = l$ avec $l > 0$ alors $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
e. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

Exercice 11. Déterminer si les suites suivantes sont croissantes ou décroissantes

(a) $u_n := 2n + \sin(n)$.

(b) $v_n := \frac{2^n}{n^2}$.

(c) $w_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(d) $z_0 := 16\,, \quad z_{n+1} := \sqrt{z_n}$.

(e) $a_n := \sqrt{n} + (-1)^n$.

Exercice 12. Etudier la convergence des suites suivantes et déterminer les limites si elles existent.

(a) $n\sin(1/n)$.

(b) $n^4(\cos(n)-2)$.

(c) $2\cos(n)+3(-1)^n-3n$.

(d) $\frac{3n+5(-1)^n}{2n}$.

(e) $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; $n\geq 1$.

(f) $\frac{\sqrt{(1-n)^2+1}}{1-n}$, $\quad n\geq 2$.

(g) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$; $n\geq 1$.

Exercice 13. Montrer que, pour tout $n\geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}.$$

En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_n$ converge.

Exercice 14. (Suite géométrique)
Déterminer la convergence ou la divergence de la suite

$$u_n := a^n\,,\quad a\in\mathbb{R}\,,$$

en fonction de la valeur de a.

Exercice 15. **Intérêts composés et emprunts.**

On se propose, en vue d'effectuer un achat important, d'emprunter une somme S à un taux d'intérêt annuel I sur une période de N mois que l'on rembourse sous forme de mensualités dont le montant est m.

On désigne, pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\leq N$, par C_n le capital restant à rembourser après l'échéance n.

Ainsi, $C_0=S$ et $C_N=0$.

On note i le taux d'intérêt mensuel, c'est-à-dire que $i=I/12$.

1. Justifier que, pour $n\in\{0,\dots,N-1\}$, $C_{n+1}=C_n(1+i)-m$.
2. On pose, pour $n\in\{0,\dots,N\}$, $u_n=C_n-\alpha$ où α est un réel. Que vaut α pour que la suite (u_n) soit une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de C_n en fonction de n.
3. Que doit valoir m pour que $C_N=0$?
4. Sortant de l'école polytech, vous obtenez un emploi d'ingénieur à Paris. Vous décidez donc d'acheter un appartement d'une surface de 80 m^2 au prix moyen à Paris, c'est-à-dire, 7900 euros le m^2 (prix moyen en novembre 2011). Vous n'avez pas fait de réelles économies et vous êtes obligés d'emprunter la totalité de la somme sur 20 ans, au taux d'intérêt de 4,20 % (taux moyen en novembre 2011 des prêts sur 20 ans). Calculez la mensualité. Quelle somme aurez-vous au final remboursée après avoir payé la dernière mensualité ?
5. Ayant calculé la mensualité, vous réalisez que vous gagnez "seulement" 3000 euros par mois, salaire déjà bien supérieur au salaire moyen d'un ingénieur débutant et que votre conjoint(e), n'ayant pas aussi bien réussi que vous, ne gagne "que" 2000 euros par mois. La loi sur

l'endettement vous interdit d'avoir des traites supérieures au tiers de vos rentrées d'argent. Il vous est donc totalement impossible dans ces conditions, de contracter le prêt précédent. Calculez quelle devrait être la durée minimale du prêt si vous voulez que vos mensualités n'excèdent pas le plafond prévu par la loi. Quelle sera alors la somme remboursée au total ?

6. Dépité une nouvelle fois par le résultat de votre calcul, vous décidez d'acheter un appartement plus petit (56 m^2) dans l'arrondissement le moins cher de Paris, c'est-à-dire le XIX ème, à 5900 euros le m^2(prix moyen en novembre 2011). Une banque vous propose un prêt sur 30 ans au taux de 4,60 % (taux moyen en novembre 2011 des prêts sur 30 ans). Pouvez-vous dire si cette fois, cela "passe" ?
7. La même banque vous propose alors un prêt sur 30 ans mais au taux "révisable" de 4,25 % (là encore, c'est le taux moyen en novembre 2011 des prêts à taux révisable sur 30 ans). Calculez la mensualité à rembourser. Quelle somme aurez-vous alors remboursée quand vos traites seront finies et si le taux n'a pas varié ?
8. Malheureusement, après avoir commencé à rembourser votre emprunt pendant deux années consécutives, une détérioration de la situation financière internationale fait que votre banque est contrainte d'augmenter le taux à 5 %, puis à 7% cinq ans plus tard. Votre mensualité ne bouge pas, mais la durée de remboursement augmente quant à elle, afin que vous remboursiez le surplus d'intérêts. Pouvez-vous dire quel sera l'allongement de la durée de remboursement ? Quelle somme aurez-vous alors remboursée au total ?

Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par:

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Soit $u_0 \geq \sqrt{2}$. On définit la suite (u_n):

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Étudier la fonction f. Vérifier en particulier: $\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) \geq \sqrt{2}$.

(b) Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{2}$.

(c) Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

(d) Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

(e) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 17. Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 18. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 19. On considère la suite $(u_n)_n$, définie pour $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer qu'il existe c un nombre réel strictement positif que l'on précisera tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq c.$$

c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.

Exercice 20. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a. Démontrer que $(a_n)_n$ est bien définie et croissante.

b. Prouver que $(b_n)_n$ est décroissante.

c. Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. (*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.*)

Exercice 21. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ converge.

Exercice 22. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

a. Justifier que $(u_n)_n$ est bien définie.

b. Montrer que $(u_n)_n$ ne peut converger que vers un seul nombre ℓ que l'on déterminera.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \ell$.

d. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{P(u_n)}{\sqrt{1+u_n}+u_n}$, où P est un polynôme du second degré que l'on déterminera et dont on étudira le signe. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

e. Prouver que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 23. a) Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers un nombre réels ℓ. Montrer que la suite $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge vers ℓ.

b) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ tel que $(u_n)_n$ diverge et $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge.

c) Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers ℓ.