Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP

Introduction à l'analyse

Planche 5 : Nombres réels. Suites réelles.

Nombres réels.

Exercice 1. Mettre sous forme irréductible p/q les rationnels suivants (les chiffres soulignés se répètent indéfiniment) :

$$0,11\underline{1}\ldots \qquad 0,23\underline{23}\ldots \qquad 0,142857\underline{142857}\ldots \qquad 0,99\underline{9}\ldots$$

Exercice 2. Montrez que, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \qquad \min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Exercice 3. Dessiner l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

a. $\max(|x|,|y|) \leq 1$.

b. $|x|+|y| \leq 1$.

Exercice 4.

1. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, avec B majorée et $A \subset B$. Montrer que A est majorée et que sup(A) $\leq$ sup(B).
2. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Soit $A+B = \{x+y,\ (x,y) \in A \times B\}$. Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$? de $\sup(A+B)$?

Exercice 5. Soient E un ensemble et f, g deux applications de E dans $\mathbb{R}$ telles que $f(E)$ et $g(E)$ soient des parties majorées de $\mathbb{R}$. On note $\sup f$ la borne supérieure de l'ensemble $f(E)$. Que peut-on dire de $\sup(f+g)$?

Exercice 6. Dire si les ensembles suivants admettent une borne supérieure et ou borne inférieure. Les calculer le cas échéant.

1. $[-1,1[\cup\{2\}$
2. $\left\{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{R}_+^\star\right\}$
3. $\left\{1-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+^\star\right\}$
4. $([-2,2[\cup\{3\}) \cap \{-1+2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} | k \in \mathbb{N}\}$
5. $\{x^2+y^2 | (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy \leq 1\}$
6. $\{(-1)^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$
7. $\{n+\frac{1}{p}; (n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2\}$

Exercice 7. Soit x un réel. On définit $E(x)$ par:

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

a. Calculer $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$.

b. Tracer le graphe de la fonction E.

c. Calculer $\lim nE\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Démontrer que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

e. En déduire un encadrement de $E(x)$ en fonction de x.

f. Soit $x \in \mathbb{R}$; calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(nx)}{n}.$$

Récurrence.

Exercice 8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $n^3 - n$ est divisible par 3.

(b) pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ $(1+a)^n \geq 1 + na$.

(c) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Suites réelles.

Exercice 9. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

a. La suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

b. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.

c. La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple. Dans tout l'exercice $(u_n)_n$ désigne une suite réelle.
a. Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_n$ est décroissante.
b. Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle est convergente.
c. Si $(|u_n|)_n$ converge vers l, alors $(u_n)_n$ converge vers l ou vers $-l$.
d. Si $\lim u_n = l$ avec $l > 0$ alors $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
e. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

Exercice 11. Déterminer si les suites suivantes sont croissantes ou décroissantes

(a) $u_n := 2n + \sin(n)$.

(b) $v_n := \frac{2^n}{n^2}$.

(c) $w_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(d) $z_0 := 16\,, \quad z_{n+1} := \sqrt{z_n}$.

(e) $a_n := \sqrt{n} + (-1)^n$.

Exercice 12. Etudier la convergence des suites suivantes et déterminer les limites si elles existent.

(a) $n \sin(1/n)$.

(b) $n^4(\cos(n) - 2)$.

(c) $2\cos(n) + 3(-1)^n - 3n$.

(d) $\frac{3n+5(-1)^n}{2n}$.

(e) $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; $n \geq 1$.

(f) $\frac{\sqrt{(1-n)^2+1}}{1-n}$, $n \geq 2$.

(g) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; $n \geq 1$.

Exercice 13. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ converge.

Exercice 14. (Suite géométrique)
Déterminer la convergence ou la divergence de la suite

$$u_n := a^n\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

en fonction de la valeur de a.

Exercice 15. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Soit $u_0 \geq \sqrt{2}$. On définit la suite (u_n):

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Étudier la fonction f. Vérifier en particulier: $\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) \geq \sqrt{2}$.

(b) Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{2}$.

(c) Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

(d) Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

(e) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 16. Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 17. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 18. On considère la suite $(u_n)_n$, définie pour $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer qu'il existe c un nombre réel strictement positif que l'on précisera tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq c.$$

c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.

Exercice 19. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a. Démontrer que $(a_n)_n$ est bien définie et croissante.

b. Prouver que $(b_n)_n$ est décroissante.

c. Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. (*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.*)

Exercice 20. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ converge.

Exercice 21. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

a. Justifier que $(u_n)_n$ est bien définie.

b. Montrer que $(u_n)_n$ ne peut converger que vers un seul nombre ℓ que l'on déterminera.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \ell$.

d. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{P(u_n)}{\sqrt{1+u_n}+u_n}$, où P est un polynôme du second degré que l'on déterminera et dont on étudira le signe. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

e. Prouver que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 22. a) Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers un nombre réels ℓ. Montrer que la suite $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge vers ℓ.

b) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ tel que $(u_n)_n$ diverge et $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge.

c) Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers ℓ.