Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP-post PACES

M0 - Consolidation des savoirs et compétences en mathématiques

Devoir maison - à rendre le 25 septembre 2013

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ une constante. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^{-x}\cos(x - \varphi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad 4y'' + 4y' + 5y = f.$$

1. Résolution de l'équation différentielle.
   (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène
   $$(E_0) \qquad 4y'' + 4y' + 5y = 0.$$
   (b) Trouver deux réels a et b tels que la fonction $g : x \mapsto e^{-x}(a\cos(x-\varphi) + b\sin(x-\varphi))$ soit solution de (E).
   (c) En déduire toutes les solutions de (E).
2. Étude de fonction.
   (a) Montrer que la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
   $$u(x) = e^{-x/2}\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$
   est la solution de (E_0) qui vaut 1 en 0 et dont la dérivée en 0 vaut $-\frac{1}{2}$.
   (b) Faire l'étude complète de la fonction u et tracer l'allure de la courbe $y = u(x)$.
   (c) Déterminer l'aire comprise entre la courbe $y = u(x)$ et l'axe des abscisses entre les points $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.