Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP-post PACES

M0 - Consolidation des savoirs et compétences en mathématiques

Corrigé du devoir maison

Énoncé

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ une constante. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x}\cos(x-\varphi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad 4y'' + 4y' + 5y = f.$$

1. Résolution de l'équation différentielle.
   (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène
   $$(E_0) \qquad 4y'' + 4y' + 5y = 0.$$
   (b) Trouver deux réels a et b tels que la fonction $g : x \mapsto e^{-x}(a\cos(x-\varphi) + b\sin(x-\varphi))$ soit solution de (E).
   (c) En déduire toutes les solutions de (E).
2. Étude de fonction.
   (a) Montrer que la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
   $$u(x) = e^{-x/2}\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$
   est la solution de (E_0) qui vaut 1 en 0 et dont la dérivée en 0 vaut $-\frac{1}{2}$.
   (b) Faire l'étude complète de la fonction u et tracer l'allure de la courbe $y = u(x)$.
   (c) Déterminer l'aire comprise entre la courbe $y = u(x)$ et l'axe des abscisses entre les points $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé

1.(a) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E_0) est $4r^2 + 4r + 5 = 0$ dont les deux racines sont $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$ (deux racines complexes conjuguées). Ainsi, d'après le cours, les solutions de (E_0) sont données par

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\big(A\cos x + B\sin x\big), \quad x \in \mathbb{R},$$

où A et B sont des réels. 1.(b) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto e^{-x}(a\cos(x-\varphi) + b\sin(x-\varphi))$ est dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{-x}\big((-a+b)\cos(x-\varphi) + (-b-a)\sin(x-\varphi)\big),$$

et

$$g''(x) = e^{-x}\big(-2b\cos(x-\varphi) + 2a\sin(x-\varphi)\big).$$

En reportant dans l'équation (E) (et en factorisant par e^{-x} et en regroupant les termes en $\cos(x-\varphi)$ et $\sin(x-\varphi)$), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{-x}\cos(x-\varphi) &= f(x) \\ &= 4g''(x) + 4g'(x) + 5g(x) \\ &= e^{-x}\big((-8b + 4(-a+b) + 5a)\cos(x-\varphi) + (8a + 4(-b-a) + 5b)\sin(x-\varphi)\big) \\ &= e^{-x}\big((a-4b)\cos(x-\varphi) + (4a+b)\sin(x-\varphi)\big). \end{aligned}$$

En multipliant à gauche et à droite par e^x, on obtient

$$\cos(x-\varphi) = (a-4b)\cos(x-\varphi) + (4a+b)\sin(x-\varphi), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $x = \varphi$, l'égalité ci-dessus donne $1 = a - 4b$ et pour $x = \varphi + \frac{\pi}{2}$, la même égalité donne $0 = 4a + b$. On trouve alors les valeurs de a et b : $a = \frac{1}{17}$ et $b = -\frac{4}{17}$. Ce qui donne

$$g(x) = \frac{1}{17}\, e^{-x}\big(\cos(x-\varphi) - 4\sin(x-\varphi)\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.(c) La fonction g trouvée à la question précédente est une solution particulière de (E). À la question 1.(a), on avait trouvé la forme de toutes les solutions de l'équation homogène associée (E_0). La solution générale de (E) est donc de la forme

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\big(A\cos x + B\sin x\big) + \frac{1}{17}\, e^{-x}\big(\cos(x-\varphi) - 4\sin(x-\varphi)\big), \quad x \in \mathbb{R},$$

où A et B sont des réels.

2.(a) La fonction $u : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\cos x$ correspond à la fonction trouvée en 1.(a) avec $A = 1$ et $B = 0$. Elle est donc solution de (E_0). On a de plus $u(0) = e^{-0/2}\cos 0 = 1$ et $u'(0) = e^{-0/2}(-\frac{1}{2}\cos 0 - \sin 0) = -\frac{1}{2}$.

2.(b) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$u'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\big(-\frac{1}{2}\cos x - \sin x\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x)$ est du signe de $-\frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Le graphe de la fonction u est compris entre les deux courbes $y = e^{-\frac{x}{2}}$ et $y = -e^{-\frac{x}{2}}$. D'autre part, $u(0) = 1$ et u s'annule partout où $x \mapsto \cos x$ s'annule, c'est-à-dire en tous les points $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.(c) L'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe $y = u(x)$ et l'axe des abscisses entre les points $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ est donnée par l'intégrale de u entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, soit donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\cos x\,dx \;=\; \Big[e^{-\frac{x}{2}}\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\sin x\,dx \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}} - \Big[\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\cos x\,dx \;=\; e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\mathscr{A}, \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\mathscr{A} = \frac{4}{5}\big(e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}}\big).$$