Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP-post PACES

M0 - Consolidation des savoirs et compétences en mathématiques

FONCTIONS USUELLES - TRIGONOMÉTRIE - NOMBRES COMPLEXES

Fonctions usuelles.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-3x\right),\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right).$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inégalités suivantes :

$$\ln(x+3)(x+5)=\ln 15,\quad \ln(x+4)+\ln x=0,\quad \ln|x-1|-\ln|x+1|=0,$$

$$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11),\quad 4(\ln x)^3-3\ln x-4=0,\quad (\ln x)^4-34(\ln x)^2+225=0,$$

$$\ln x<3,\quad \ln|2x+1|\geq 1,\quad 3\ln x>\ln(3x-2),\quad \ln(x-1)+\ln(x-4)>\ln(x+4).$$

Exercice 3. Soit $a,b\in\mathbb{R}$. On note f l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & x & \longmapsto & ax+b-\sqrt{x^2+1}. \end{array}$$

1. Étudier la limite de f en $-\infty$ (discuter selon les valeurs de a).
2. Déterminer a et b pour que la représentation graphique de f admette pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $2x-y+2=0$. Tracer la courbe $y=f(x)$ dans ce cas.

Exercice 4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}.$$

Exercice 5. Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par

$$f(x)=x+\sqrt{x-1},\quad g(x)=\sqrt{|2-x|},\quad h(x)=\frac{2x-3}{3x+3},\quad k(x)=x-1+e^{-x},\quad \ell(x)=\frac{1}{\ln x}.$$

Fonctions trigonométriques.

Exercice 6. En utilisant les formules de doublement d'angle dans les formules de sinus et cosinus, donner les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et déterminer si ces fonctions sont paires, impaires, ou périodiques :

$$f:x\mapsto x^2-1-2\cos x,\quad f:x\mapsto\frac{\sin 2x}{2-\cos^2 x},\quad f:x\mapsto(e^{x-1}+e^{1-x})\cos 2x,\quad f:\mapsto\ln(x^2+4)\sin 3x.$$

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que

$$\cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \tfrac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \tfrac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 9. Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 3\sin 2x + 2\cos 3x - 3$.

Nombres complexes.

Exercice 10. Calculer $\sin 7x$ et $\cos 7x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Donner sous la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ la valeur des nombres complexes suivants

$$(1+i)^7, \quad (\sqrt{3} - i)^3, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}.$$

Exercice 12. En calculant le nombre complexe $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ de deux manières différentes, donner la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$ et de $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 13. Décrire géométriquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$z^2 \in \mathbb{R}, \quad (\bar{z} - 2)(z+1) \in \mathbb{R}, \quad (\bar{z} - 2)(z+1) \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 14. Trouver module et argument du nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

1. Pour quels entiers n, z^n est-il réel ? Calculer le plus petit de ces z^n.
2. Pour quels entiers n, z^n est-il imaginaire pur ?

Exercice 15.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - (5-2i)z + 5 - 5i = 0, \quad (2-i)z^2 - (3+i)z - 2 + 6i = 0, \quad z^2 - 2(5-i)z - 12i = 0.$$

2. Trouver une solution réelle à l'équation

$$z^3 - 6z^2 + (12+2i)z - 8 - 4i = 0.$$

En déduire toutes les racines (réelles et complexes) de l'équation.

Exercice 16. Soit z le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S + T$ et ST. En déduire les valeurs de S et T.