Université Aix-Marseille 2013–2014

Parcours PEIP-post PACES

M0 - Consolidation des savoirs et compétences en mathématiques

DÉRIVATION - INTÉGRATION

Dérivation.

Exercice 1. En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, étudier la dérivabilité des fonctions f suivantes aux points x_0 indiqués :

$$\begin{array}{llllll} f : x \mapsto x^2 - |x| & \text{en} & x_0 = 0, & f : x \mapsto x^2|x| & \text{en} & x_0 = 0, \\ f : x \mapsto \frac{1}{x^2} & \text{en} & x_0 = 2, & f : x \mapsto \sqrt{x+2} & \text{en} & x_0 = 1, \\ f : x \mapsto \frac{x+2}{x} & \text{en} & x_0 = 3, & f : x \mapsto |x(x-1)| & \text{en} & x_0 = 1. \end{array}$$

1. Dans les cas où f est dérivable en x_0, écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$.
2. Dans les cas où f n'est pas dérivable en x_0, étudier la dérivabilité à droite et à gauche de f en x_0 et interpréter géométriquement ces résultats.

Exercice 2. Déterminer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions f suivantes :

$$\begin{array}{llll} f(x) = (x^2+3)(x-2), & f(x) = \frac{1}{x^3+x+1}, & f(x) = \frac{2\sin x+1}{2\sin x-1}, & f(x) = \tan x + \frac{1}{\tan x}, \\ f(x) = x(\ln x)^2, & f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|, & f(x) = (1+x+x^2)e^x, & f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \\ f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, & f(x) = \frac{1-\sin x}{1-\cos x}, & f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ln x, & f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}. \end{array}$$

Exercice 3. Déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ m(x^2-4) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + (m^2-2)x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x+2m}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^3|$. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f''(x) = 6|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer les dérivées successives des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^{ax}, \quad g : x \mapsto xe^x, \quad h : x \mapsto x^n \ (n \text{ entier fixé}).$$

Exercice 6. Trouver une relation entre f et f'' indépendante de x dans les cas suivants :

$$f : x \mapsto \sin(ax+b), \quad f : x \mapsto \cos(ax+b), \quad f : x \mapsto \sin^2 x, \quad f : x \mapsto \cos^2 x.$$

Exercice 7.

1. Soit f la fonction définie sur $]0, e[$ par $f(x) = \frac{\ln x-2}{\ln x-1}$. Étudier le sens de variations de f sur $]0, e[$ et montrer que f définit une bijection de $]0, e[$ sur $]1, +\infty[$. Exprimer la dérivée de la fonction réciproque f^{-1}.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$. Montrer que φ est paire, continue et dérivable. Étudier les variations de φ et déterminer, si elles existent, les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ de la courbe représentative de φ, ainsi que la position de cette courbe par rapport aux asymptotes. Donner une allure du graphe de φ.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Faire une étude complète de f (sens de variations, limites, asymptotes éventuelles) et construire sa courbe représentative.

Intégration.

Exercice 9. Déterminer les primitives sur un intervalle I à préciser des fonctions f définies par :

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}\,x^3 - x^2 + 7, & f(x) = (x-1)^2(x+1), & f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \\ f(x) = (2x-3)^3 - \frac{1}{(2x-3)^3}, & f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}, & f(x) = \sqrt{5x-1} + \frac{1}{\sqrt{5x-1}}, \\ f(x) = \frac{1}{x \ln x}, & f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}, & f(x) = e^x + e^{-x} + e^{3x}, \\ f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}, & f(x) = (x^3+1)e^{2x}, & f(x) = \sin(2x)\, e^x. \end{array}$$

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{t}\, dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\, dt, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt \quad \int_{-4}^{-2} \ln|t|\, dt, \quad \int_1^8 \frac{1}{1-2t}\, dt,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx, \quad \int_0^{\pi} \sin^3 x\, dx, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{1-\cos x}\, dx, \quad \int_0^1 (x^2+2x+3)e^x\, dx, \quad \int_0^{\pi} \cos(2x)\, e^{-x}\, dx.$$

Exercice 11.

1. Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$.
   (a) Montrer que f est décroissante.
   (b) Trouver une primitive de f.
2. Pour $n \geq 3$, on pose $u_n = \dfrac{1}{3(\ln 3)^2} + \dfrac{1}{4(\ln 4)^2} + ... + \dfrac{1}{n(\ln n)^2} = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 3$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est bornée.

Exercice 12.

1. Rappeler la formule du périmètre d'un cercle de rayon $r > 0$.
2. En identifiant l'aire d'un anneau d'épaisseur dr petite et de rayon $r > 0$ avec l'aire du rectangle de longueur le périmètre du cercle de rayon r et de largeur dr, montrer que l'aire d'un disque de rayon $R > 0$ vaut πR^2.
3. Avec le même raisonnement que plus haut, en identifiant le volume d'une tranche de boule avec un disque épais de surface πr^2 et de hauteur dr, calculer le volume d'une boule de rayon $R > 0$.
4. Avec la même méthode que plus haut, calculer le volume d'un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R.