Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Année universitaire 2016-2017

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☒ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1$^{\text{er}}$ semestre ☒ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence MPCI
Code du module : SMP4U1J Libellé du module : Calcul intégral
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI

Est autorisé le résumé du cours (3 pages) distribué aux étudiants, non annoté.
Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.

Question de cours : Démontrer le théorème d'Abel (Théorème 9 du résumé de cours) :

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, positive, décroissante, de limite nulle en $+\infty$. Soit $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de g sur $[1,+\infty[$. On suppose que G est bornée sur $[1,+\infty[$. Alors l'intégrale généralisée du produit fg sur $[1,+\infty[$ est convergente.

Exercice (Fractions rationnelles)

Soit $R(x) = \frac{1-x^2}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Factoriser x^4+1 en deux polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ de degré 2.
2. Décomposer la fraction rationnelle R en éléments simples. On pourra remarquer que $R(-x) = R(x)$.
3. Donner l'expression de la primitive de R qui s'annule en 0 à l'aide de fonctions usuelles.

Problème

Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = 1$.

1. (Sommes de Riemann)
   (a) Expliquer en deux lignes maximum pourquoi g est continue (ou non) sur $[0,+\infty[$.
   (b) Pour $n \geq 1$, on note $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quoi (on exprimera la limite éventuelle en fonction de g) ?
2. (Intégrales généralisées)
   Soit $\alpha \geq 0$. On note
   $$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que I_0 est divergente à l'infini et que pour $\alpha \geq 2$, I_α est divergente en 0.
   (b) Montrer que pour $1 < \alpha < 2$, l'intégrale généralisée I_α est absolument convergente.
   (c) Montrer que pour $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale généralisée I_α est convergente.
3. (Question bonus si vous avez encore du temps)
   Soit $1 < \alpha < 2$. Étudier (domaine de définition D, continuité, dérivabilité) la fonction F_α définie par
   $$F_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad x \in D \subset \mathbb{R}.$$