école normale supérieure de Cachan
ENS BRETAGNE

Rapport sur le travail présenté
par Madame Sylvie Monniaux sur le thème
"Régularité maximale et Équations de Navier-Stokes"
pour l'obtention de l'habilitation à diriger les recherches
à l'Université Paul Cézanne - Aix-Marseille 3

Le travail présenté par Madame Sylvie Monniaux relève de l'analyse mathématique et peut être divisé en deux thèmes principaux:
- les questions de régularité maximale pour des opérateurs linéaires abstraits dans les espaces de Banach,
- l'étude mathématique des équations de Navier-Stokes qui, comme on le sait, modélisent l'évolution spatio-temporelle des fluides incompressibles.

CHAPITRE 1. Régularité maximale.

On considère le système d'évolution abstrait suivant posé dans un espace de Banach X:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0,T), \quad u(0) = 0. \tag{1}$$

Ici, $A(t)_{t\in(0,T)}$ désigne une famille de (bons) opérateurs linéaires non bornés de X et dépendant du temps $t \in (0,T)$, et $f \in L^p(0,T;X)$ est donnée où $p \in]1,+\infty[$.

La question générale, dite de *régularité maximale* est de savoir si, séparément, $u'(t)$ et $A(t)u(t)$ sont aussi dans $L^p(0,T;X)$.

1.1. Cas autonome: $A(t) \equiv A$, indépendant du temps. On sait qu'une condition nécessaire pour la régularité maximale est que le semi-groupe engendré par A soit analytique, et qu'alors, la régularité maximale est indépendante de $p \in]1,+\infty[$. Elle est toujours réalisée dans un espace de Hilbert. Reste le cas d'un espace de Banach quelconque pour lequel plusieurs approches sont possibles dont deux plus particulièrement adoptées dans ce travail:

- la solution de (1) avec $A(t) \equiv A$ est donnée par

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\,ds, \text{ et } u'(t) = \int_0^t Ae^{-(t-s)A} f(s)\,ds = Rf(t).$$

Comme A engendre un semi-groupe analytique, on a $\|Ae^{-tA}\| \le c/t$. Ainsi, l'opérateur $R : f \in L^p(0,T:X) \to u'$ est donné par une intégrale singulière et liée à la transformation de Hilbert dans $L^p(0,T;X)$.

- on peut voir l'opération $u \to u' + Au$ comme la somme de deux opérateurs non bornés dans $L^p(0,T;X)$. La question revient alors à celle de l'inversibilité de cette somme d'opérateurs dans l'intersection de leurs domaines de $L^p(0,T;X)$.

antenne de Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
02 99 05 93 00
02 99 05 93 29
antenne@bretagne.ens-cachan.fr
61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00
01 47 40 20 74
Cachan

école normale supérieure de Cachan
ENS BRETAGNE

Un résultat marquant dans ce contexte est le suivant, valable *dans les espaces de Banach ayant la propriété UMD: si $(U(s))_{s\in R}$ vérifie*

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{\log \|U(s)\|}{|s|} < \pi, \tag{2}$$

alors son générateur analytique C est sectoriel et admet des puissances imaginaires bornées telles que $C^{is} = U(s)$.

Ceci permet, par exemple, de retrouver comme corollaire le fameux théorème de Dore-Venni sur l'inversibilité de $A+B$ lorsque A, B sont des générateurs analytiques de semi-groupes commutant et satisfaisant des conditions de croissance du type (2).

Un autre résultat concerne la perturbation d'opérateurs admettant des puissances imaginaires bornées: *si A est un tel opérateur d'angle spectral φ_A et B une perturbation bornée inversible d'angle spectral qui commute avec A. Alors, si $\varphi_A + \varphi_B < \pi$, $A+B$ admet lui-même des puissances imaginaires bornées.*

1.2: Le cas non autonome. Le but est d'obtenir des extensions des résultats du type précédent aux équations générales (1). Ceci nécessite de gérer des sommes d'opérateurs avec des hypothèses de commutativité affaiblies. Un première contribution, toujours dans les espace à propriété UMD, concerne la somme d'opérateurs à puissance imaginaire bornée, de croissance contrôlée au sens de (2), et dont les résolvantes satisfont à des estimations de "commutativité" convenables: cette somme est alors inversible. Elle est aussi sectorielle.

Ceci conduit au corollaire suivant pour (1): *si les opérateurs $A(t)$ sont uniformément sectoriels et satisfont à des conditions de variations classiques (Labbas-Terreni) portant sur les résolvantes, alors il y a régularité maximale pour (1).* Il est aussi possible d'atteindre des solutions classiques pour (1) avec des données initiales non nulles ($u(0) = x$).

Il est ensuite prouvé que, comme dans le cas autonome (et dans un espace de Banach quelconque), la propriété de régularité maximale est indépendante de p pour des $A(t)$ uniformément sectoriels avec la condition de Labbas-Terreni et qu'elle est effectivement réalisée pour un espace de Hilbert.

1.3: Quelques opérateurs particuliers. Cette première partie contient également des résultats de régularité nouveaux pour des opérateurs spécifiques: la possibilité d'extension à L^2 tout entier d'opérateurs pseudo-différentiels à symbole raisonnablement régulier; l'application des résultats non-autonomes ci-dessus au cas d'opérateurs à noyau de chaleur: des conditions sont données sur les noyaux pour assurer les hypothèses des théorèmes abstraits et avoir ainsi la régularité maximale.

MP

CHAPITRE II: Equations de Navier-Stokes.

Cette deuxième partie aborde des questions d'existence, de régularité et

antenne de Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
✆ 02 99 05 93 00
02 99 05 93 29
antenne@bretagne.ens-cachan.fr

61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00 ✆
01 47 40 20 74
Cachan

école normale supérieure de Cachan
ENS BRETAGNE

d'unicité pour le système de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \nabla p + (v \cdot \nabla) v = 0, \ \nabla \cdot v = 0, \ \text{dans }]0, T[\times \Omega,$$

où Ω est un ouvert de R^d, avec, le plus souvent, des conditions de Dirichlet homogènes au bord de Ω pour la vitesse ($u = 0$ sur $\partial\Omega$).

On sait que l'étude mathématique des équations de Navier-Stokes a fait l'objet d'une littérature particulièrement abondante. Il reste cependant beaucoup de questions intéressantes à résoudre, mais, en général, hautement non triviales: c'est le cas de la plupart des questions abordées ici.

Unicité. C'est le cadre de solutions faibles, dites 'intégrales' qui est adopté. Un premier résultat en dimension $d = 3$ avec $\Omega = R^3$, prouve l'unicité des solutions à valeurs dans $L^3(R^3, R^3)$. La démonstration, relativement simple, repose sur un résultat préalable de régularité maximale pour le laplacien dans R^3 (et fait donc un lien thématique avec le chapitre précédent). La méthode s'étend au cas d'ouverts réguliers et bornés.

Le cas d'ouverts peu réguliers est étudié ensuite. Toujours à l'aide d'un préalable de régularité maximale, mais cette fois en dimension quelconque, l'unicité dans $L^d(\Omega, R^d)$ est prouvée pour un ouvert Ω à bord lipschitzien.

Existence. Ici, le but est d'obtenir l'existence dans le cas *d'ouverts quelconques* sans régularité a priori sur le bord. Une première étape à franchir est celle d'une bonne définition de l'opérateur de Stokes. C'est ce qui est fait dans l'un des articles: il est montré que l'opérateur de Stokes ainsi construit est auto-adjoint et engendre un semi-groupe analytique. Il en résulte l'existence d'une solution pour l'équation de Navier-Stokes associée pour des données initiales allant jusquà l'espace critique $D(A^{\frac{1}{4}})$.

Des résultats plus précis sont obtenus dans le cas où l'ouvert est à bord lipschitzien et la dimension égale à 3: la solution est plus régulière (une régularité optimale est établie) et on peut obtenir l'unicité.

Enfin, cette partie contient la discussion d'autres types de conditions aux limites, plus naturelles dans certaines applications. L'opérateur de Stokes associé est étudié en dimension 3 pour des ouverts à bord lipschitzien, et dans les espaces L^p. L'analyticité du semi-groupe y est établie.

En conclusion, le travail présenté par Mme Sylvie Monniaux constitue une contribution originale et de haut niveau, d'une part à l'étude de la régularité maximale pour les équations d'évolution abstraites dans les espaces de Banach, d'autre part, à la résolution de plusieurs questions difficiles d'unicité, de régularité et d'existence pour le système de Navier-Stokes. L'ensemble a donné lieu à 11 publications dans des revues internationales de très bon niveau (seule ou en collaboration), 2 compte-rendus à l'académie des Sciences et 3 prépublications. On est en particulier impressionné par la finesse de beaucoup des résultats obtenus, ce, dans deux domaines pourtant largement explorés par

M

antenne de Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
02 99 05 93 00
02 99 05 93 29
antenne@bretagne.ens-cachan.fr
61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00
01 47 40 20 74
Cachan

de nombreux mathématiciens. Ces travaux révèlent des talents remarquables en analyse mathématique de la part de l'auteure , ainsi que son goût pour attaquer des problèmes difficiles.

En conséquence, je donne un avis *très favorable* à la soutenance d'une habilitation à diriger des recherches sur la base de ces travaux.

Fait à Bruz, le 9 mars 2007

Michel PIERRE,
Professeur des Universités
Ecole Normale Supérieure de Cachan,
Antenne de Bretagne

antenne de
Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
02 99 05 93 00
02 99 05 93 29
antenne@bretagne.ens-cachan.fr
61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00
01 47 40 20 74
Cachan