C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 233-238, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Noyaux de la chaleur et estimations mixtes $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$ optimales : le cas non autonome

Matthias HIEBER [a], Sylvie MONNIAUX [b]

[a] Mathematisches Institut 1, Universität Karlsruhe, Englerstr. 2, 76128 Karlsruhe, Allemagne
Courriel : matthias.hieber@math.uni-karlsruhe.de

[b] Laboratoire de mathématiques fondamentales et appliquées, faculté des sciences de Saint-Jérôme, case Cour A, 13397 Marseille cedex 20, France
Courriel : sylvie.monniaux@math.u-3mrs.fr

(Reçu et accepté le 1[er] décembre 1998)

Résumé. On considère le problème non autonome $u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$, $u(0) = 0$, où $-A(t)$ engendre pour chaque $t \in [0,T]$, un semi-groupe holomorphe borné sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$. On démontre des estimations a priori $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$ optimales pour la solution de l'équation précédente à condition que les semi-groupes T_t soient associés à des noyaux vérifiant des estimations gaussiennes et que les opérateurs $\{A(t), t \in [0,T]\}$ remplissent une condition de commutateur de type Acquistapace–Terreni. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Heat kernel and maximal $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$ ***estimates: the non-autonomous case***

Abstract. *Consider the non-autonomous initial value problem* $u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$, $u(0) = 0$, *where* $-A(t)$ *is for each* $t \in [0,T]$, *the generator of a bounded analytic semigroup on* $\mathrm{L}^2(\Omega)$. *We prove maximal* $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$ *a priori estimates for the solution of the above equation provided the semigroups* T_t *are associated to kernels which satisfies an upper Gaussian bound and* $\{A(t), t \in [0,T]\}$ *fulfills a Acquistapace–Terreni commutator condition.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

Let $T > 0$ be fixed and $f : [0,T] \to X$ be a function with values in some Banach space X. In this Note, we investigate so-called maximal regularity properties of solutions of non-autonomous initial value problems of the form:

$$\begin{aligned} u'(t) + A(t)u(t) &= f(t), \quad t \in [0,T], \\ u(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where for each $t \in [0,T]$, $-A(t)$ is the generator of a bounded analytic semigroup on X. Given $p \in (1,\infty)$, we say that there is *maximal* L^p*-regularity* for (1) and write $A \in \mathrm{MR}(p,X)$ if for all

Note présentée par Haïm BRÉZIS.

$f \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$, there exists a unique $u \in \mathrm{W}^{1,p}(0,T;X)$ with $A(\cdot)u(\cdot) \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ verifying (1) in the sense of $\mathrm{L}^p(0,T;X)$.

Choosing in particular $X = \mathrm{L}^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, the property of maximal L^p-regularity implies a priori estimates for the solution of (1) of the form:

$$\int_0^T \|u'(\tau)\|_q^p \mathrm{d}\tau + \int_0^T \|A(\tau)u(\tau)\|_q^p \mathrm{d}\tau \le C \int_0^T \|f(\tau)\|_q^p \mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

which are of particular interest when dealing with quasilinear problems (*see* [2]). In case the domains $\mathrm{D}(A(t))$ of $A(t)$ are independent of $t \in [0,T]$, results on maximal L^p-regularity for the non-autonomous case (1) may be easily derived from the corresponding results for the autonomous equation. In the following, we allow the domains $\mathrm{D}(A(t))$ to vary with t.

Recently, it was shown in [7] that (2) holds in the case $A(t) = A$, $t \in [0,T]$, provided the semigroup generated by $-A$ is associated to a kernel which satisfies a Gaussian (or more general a Poisson) bound. It is the aim of this Note to present a result which extends the result in [7] to the non-autonomous case. When dealing, for example, with second order differential equations in divergence form subject to co-normal boundary conditions, the domains $\mathrm{D}(A(t))$ of the associated realization $A(t)$ in $\mathrm{L}^q(\Omega)$ vary with t and the commutator conditions of Acquistapace–Terreni will be of central importance.

For $\theta \in (0,\pi]$, we denote by Σ_θ the sector $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \theta\}$. We consider a family of linear operators $\{A(t), t \in [0,T]\}$ in X satisfying the following two assumptions:

(A1) there exists $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ such that $\sigma(A(t)) \subset \Sigma_\theta$ for all $t \in [0,T]$, and for all $\varphi \in (\theta,\pi)$, there exists $M_\varphi > 0$ such that

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_\varphi}{1+|\lambda|}, \quad t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\varphi.$$

The condition (A1) implies that the operators $-A(t)$ ($t \in [0,T]$) generate uniformly bounded analytic C_0-semigroups on X.

(A2) There exist $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha < \beta$, $\omega \in (\theta, \frac{\pi}{2})$, $c > 0$ such that

$$\|A(t)(\lambda - A(t))^{-1}(A(t)^{-1} - A(s)^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \le c\, \frac{|t-s|^\beta}{(1+|\lambda|)^{1-\alpha}},$$

$s,t \in [0,T]$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega$.

We remark that Condition (A2) was introduced and investigated by Acquistapace–Terreni [1] in order to study (1).

Using pseudo-differential operators techniques and general results on singular integrals (*see* [8]), we can prove the following theorem (*see* [5]).

THEOREM 1. – *Assume that* $\{A(t), t \in [0,T]\}$ *satisfies* (A1) *and* (A2) *in a Banach space* X.

(a) *Suppose that there exists* $p \in (1,\infty)$ *such that* $\{A(t), t \in [0,T]\}$ *belongs to* $\mathrm{MR}(p,X)$. *Then* $\{A(t), t \in [0,T]\}$ *belongs to the class* $\mathrm{MR}(q,X)$ *for all* $q \in (1,\infty)$.

(b) *Let* X *be a Hilbert space,* $p \in (1,\infty)$. *Then* $\{A(t), t \in [0,T]\}$ *belongs to the class* $\mathrm{MR}(p,X)$.

Let now $\mathcal{M}$ be a measurable subset of a space of homogeneous type $(\Omega, \mathrm{m}, \mathrm{d})$ which satisfies the doubling property (*see* [9]). Consider $\{A(t), t \in [0,T]\}$ in $X_2 = \mathrm{L}^2(\mathcal{M}, \mathrm{m})$ satisfying (A1). Suppose that the semigroups T_t generated by $-A(t)$ ($t \in [0,T]$) are represented by

$$(T_t(\sigma)f)(x) = (\mathrm{e}^{-\sigma A(t)}f)(x) = \int_{\mathcal{M}} k_t(\sigma,x,y)f(y)\,\mathrm{dm}(y) \quad \text{m-a.a. } x \in \mathcal{M},$$

for all $f \in X_2$, where $k_t(\sigma, \cdot, \cdot)$ is bounded and measurable on $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Assume that the kernels satisfy a uniform estimate of the following type:

(K) there exist a constant $n > 0$ and a bounded decreasing function g defined on $(0, \infty)$ satisfying $\lim_{r \to \infty} r^{2\ell+\gamma} g(r) = 0$ (for some $\gamma > 0$ and $\ell > 0$), such that

$$|k_t(\sigma, x, y)| \leq \min\left(\frac{1}{\mathrm{m}(\mathrm{B}(x, \sigma^{\frac{1}{n}}))}, \frac{1}{\mathrm{m}(\mathrm{B}(y, \sigma^{\frac{1}{n}}))}\right) g\left(\frac{\mathrm{d}(x, y)}{\sigma^{\frac{1}{n}}}\right)$$

holds for all $t \in [0, T]$, $\sigma > 0$, and for m-a.a. $x, y \in \mathcal{M}$, where $\mathrm{B}(x, r) := \{y \in \Omega; \mathrm{d}(x, y) < r\}$.

The condition (K) implies that the semigroups $\{T_t, t \in [0, T]\}$ act consistently also on $X_q := \mathrm{L}^q(\mathcal{M}, \mathrm{m})$ for $1 \leq q \leq \infty$. We denote their generators by $-A_q(t)$. We consider the following commutator conditions:

(C) for $q = 1$ and $q = \infty$, there exists $\omega_q \in (\theta, \frac{\pi}{2})$, $\alpha_q, \beta_q \in [0, 1]$, $\alpha_q < \beta_q$ and a constant $c_q > 0$ such that

$$\|(\lambda - A_q(t))^{-1} - (\lambda - A_q(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_q)} \leq \frac{c_q\,|t - s|^{\beta_q}}{(1 + |\lambda|)^{1-\alpha_q}}$$

for all $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\omega_q}$ and $s, t \in [0, T]$.

The main result of this Note is the following theorem.

THEOREM 2. – *Assume that* $\{A(t), t \in [0, T]\}$ *in* X_2 *satisfies* (A1) *and* (K). *Suppose that* $\{A_q(t), t \in [0, T]\}$ *satisfies* (A2) *on* X_q *for all* $q \in (1, \infty)$ *and* (C) *for* $q = 1$ *and* $q = \infty$. *Let* $1 < p, q < \infty$. *Then* $\{A(t), t \in [0, T]\}$ *belongs to the class* $MR(p, X_q)$. *In particular,* (2) *holds.*

Sketch of the proof of Theorem 2. – The assertions of Theorem 1 imply that in order to prove Theorem 2 it suffices to show that the operator S_1 given by

$$(S_1 f)(t) = \int_0^t A_1(t) T_t^{(1)}(t - s) f(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [0, T],$$

and its adjoint are of weak type $(1, 1)$. In order to do so consider the Calderón–Zygmund decomposition of an L^1-function f on the product space $(0, T) \times \Omega$ in $f = g + \sum_i b_i$. The idea of the proof is to introduce "smoothing operators" Q_i such that on one hand $Q_i b_i$ fulfills a Harnack-type inequality and on the other hand that (A2) allows to estimate $(1 - Q_i) b_i$.

1. Présentation du problème

Soient $T > 0$ fixé et $f : [0, T] \to X$ une fonction à valeurs dans un espace de Banach X. Dans cette Note, nous étudions les propriétés de régularité maximale de problèmes non autonomes du type :

$$\begin{aligned} u'(t) + A(t) u(t) &= f(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

où pour chaque $t \in [0, T]$, $-A(t)$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe borné sur X. Étant donné $p \in (1, \infty)$, on dit qu'il y a *régularité maximale* L^p pour (1) et on écrit $A \in \mathrm{MR}(p, X)$ si pour tout $f \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$, il existe une unique $u \in \mathrm{W}^{1,p}(0,T;X)$ telle que $A(\cdot)u(\cdot) \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ vérifiant (1) au sens de $\mathrm{L}^p(0,T;X)$. Même dans le cas où $A(t) = A$ ($t \in [0,T]$), la question de la régularité maximale L^p, ainsi que formulée par Haïm Brézis, reste ouverte dans sa généralité.

Si on choisit, en particulier, $X = \mathrm{L}^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, la propriété de régularité maximale L^p implique des estimations a priori pour la solution de (1) de la forme :

$$\int_0^T \|u'(\tau)\|_q^p \mathrm{d}\tau + \int_0^T \|A(\tau)u(\tau)\|_q^p \mathrm{d}\tau \leq C \int_0^T \|f(\tau)\|_q^p \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Ces estimations sont d'un intérêt particulier lorsqu'on s'intéresse à des problèmes quasi-linéaires (*voir* [2]). Dans le cas où les domaines $\mathrm{D}(A(t))$ de $A(t)$ sont indépendants de $t \in [0,T]$, des résultats de régularité maximale L^p pour le problème non autonome (1) se déduisent aisément des résultats correspondants pour l'équation autonome. Dans la suite, nous considérons des opérateurs dont les domaines $\mathrm{D}(A(t))$ peuvent varier avec $t \in [0,T]$.

Récemment, il a été montré dans [7] que l'on a effectivement les estimations a priori (2) dans le cas où $A(t) = A$, $t \in [0,T]$, à condition que le semi-groupe engendré par $-A$ soit associé à un noyau satisfaisant des estimations gaussiennes, ou plus généralement des estimations de Poisson. Lorsque l'on s'intéresse, par exemple, à des équations aux dérivées partielles en forme divergence avec des conditions aux limites co-normales, les domaines $\mathrm{D}(A(t))$ des réalisations $A(t)$ associées dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$ varient avec t et la condition de commutateur d'Acquistapace–Terreni joue un rôle primordial pour étudier (1).

2. Cas hilbertien et indépendance par rapport à p

Pour $\theta \in (0,\pi]$, on note par Σ_θ le secteur $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \theta\}$. On considère une famille d'opérateurs $\{A(t), t \in [0,T]\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(A1) il existe $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tel que $\sigma(A(t)) \subset \Sigma_\theta$ pour tout $t \in [0,T]$ et, pour tout $\varphi \in (\theta, \pi)$, il existe $M_\varphi > 0$ telle que

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\varphi}{1+|\lambda|}, \quad t \in [0,T], \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\varphi.$$

(A2) Il existe $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha < \beta$, $\omega \in (\theta, \frac{\pi}{2})$, $c > 0$ tels que

$$\|A(t)(\lambda - A(t))^{-1}(A(t)^{-1} - A(s)^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\, \frac{|t-s|^\beta}{(1+|\lambda|)^{1-\alpha}},$$

$s, t \in [0,T]$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega$.

Ces deux conditions ont été introduites et exploitées par Acquistapace–Terreni [1] dans le but d'étudier (1) et de construire une famille d'évolution associée à la famille d'opérateurs $\{A(t), t \in [0,T]\}$. La condition (A1) implique que les opérateurs $-A(t)$ ($t \in [0,T]$) engendrent des semi-groupes fortement continus, holomorphes uniformément bornés $\{T_t(\sigma) = \mathrm{e}^{-\sigma A(t)}, \sigma \geq 0\}$ sur X. Nous obtenons alors le théorème suivant (*voir* [5]) :

THÉORÈME 1. – *Soient X un espace de Banach, $T > 0$ et $\{A(t), t \in [0,T]\}$ une famille d'opérateurs vérifiant les deux conditions* (A1) *et* (A2).

(a) *On suppose qu'il existe un $p \in (1,\infty)$ tel que la famille $\{A(t), t \in [0,T]\}$ soit dans la classe* $\mathrm{MR}(p,X)$. *Alors $\{A(t), t \in [0,T]\}$ est dans la classe* $\mathrm{MR}(q,X)$ pour tout $q \in (1,\infty)$.

(b) *Soit X un espace de Hilbert, $p \in (1,\infty)$. Alors $\{A(t), t \in [0,T]\}$ est dans la classe* $\mathrm{MR}(p,X)$.

3. Cas d'opérateurs engendrant des semi-groupes à noyaux de la chaleur

On considère maintenant le cas d'un espace de type homogène $(\Omega, \mathrm{m}, \mathrm{d})$ satisfaisant la propriété de doublement (*voir* [9]). Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble mesurable de Ω. On considère $\{A(t), t \in [0,T]\}$ une famille d'opérateurs linéaires sur $X_2 := \mathrm{L}^2(\mathcal{M}, \mathrm{m})$. On suppose que $\{A(t), t \in [0,T]\}$ vérifie la condition (A1) dans X_2. On suppose de plus que les semi-groupes T_t engendrés par $-A(t)$ ($t \in [0,T]$) sur X_2 sont donnés par des noyaux k_t de la façon suivante :

$$(T_t(\sigma)f)(x) = (\mathrm{e}^{-(t-s)A(t)}f)(x) = \int_{\mathcal{M}} k_t(\sigma, x, y) f(y)\,\mathrm{dm}(y) \quad \text{m-p.t. } x \in \mathcal{M},$$

pour tout $f \in X_2$, où $k_t(\sigma, \cdot, \cdot)$ ($\sigma > 0$, $t \in [0,T]$) sont des fonctions mesurables bornées sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, qui vérifient une estimation uniforme du type suivant :

(K) il existe une constante $n > 0$ et une fonction décroissante bornée g définie sur $(0, \infty)$ vérifiant $\lim_{r\to\infty} r^{2\ell+\gamma} g(r) = 0$ (pour un $\gamma > 0$, et $\ell > 0$ étant lié à la croissance du volume des boules de Ω ; *voir* par exemple [9] pour plus de détails) telles que

$$|k_t(\sigma, x, y)| \le \min\left(\frac{1}{\mathrm{m}(\mathrm{B}(x, \sigma^{\frac{1}{n}}))}, \frac{1}{\mathrm{m}(\mathrm{B}(y, \sigma^{\frac{1}{n}}))}\right) g\left(\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\sigma^{\frac{1}{n}}}\right)$$

pour $t \in [0,T]$, $\sigma > 0$, et pour m-p.t. $x, y \in \mathcal{M}$, où $\mathrm{B}(x,r) := \{y \in \Omega; \mathrm{d}(x,y) < r\}$.

La condition (K) implique que pour tout $q \in [1, \infty]$, il existe des semi-groupes $\{T_t^{(q)}, t \in [0,T]\}$ compatibles sur les espaces $X_q := \mathrm{L}^q(\mathcal{M}, \mathrm{m})$ et tels que $T_t^{(2)} = T_t$ pour tout $t \in [0,T]$. On note par $-A_q(t)$ le générateur de $T_t^{(q)}$. On suppose que la condition suivante est vérifiée.

(C) Pour $q = 1$ et $q = \infty$, il existe $\alpha_q, \beta_q \in [0,1]$, $\alpha_q < \beta_q$, $\omega_q \in (\theta, \frac{\pi}{2})$, $c_q > 0$ tels que

$$\|(\lambda - A_q(t))^{-1} - (\lambda - A_q(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_q)} \le c_q \frac{|t-s|^{\beta_q}}{(1+|\lambda|)^{1-\alpha_q}},$$

$s, t \in [0,T]$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\omega_q}$.

Sous ces hypothèses, nous pouvons énoncer le résultat principal de cette Note :

THÉORÈME 2. – *Soit* $\{A(t), t \in [0,T]\}$ *dans* X_2 *une famille d'opérateurs qui vérifie* (A1) *et* (K). *On suppose que* $\{A_q(t), t \in [0,T]\}$ *vérifie* (A2) *sur* X_q *pour tout* $q \in (1,\infty)$, *et* (C) *pour* $q = 1$ *et* $q = \infty$. *Alors* $A \in \mathrm{MR}(p, X_q)$ *pour tout* $p \in (1,\infty)$ *et tout* $q \in (1,\infty)$. *En particulier, l'estimation* (2) *est satisfaite.*

Idée de la démonstration du théorème 2. – On peut montrer que sous les conditions (A1) et (A2) sur X_q, $A_q \in \mathrm{MR}(p, X_q)$ si et seulement si l'opérateur S_q, donné par :

$$(S_q f)(t) = \int_0^t A_q(t) T_t^{(q)}(t-s) f(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0,T],$$

est borné sur $\mathrm{L}^p(0,T; X_q)$. Remarquons que S_q est défini par une intégrale singulière. Soit $q \in (1,\infty)$ fixé pour l'instant. D'après le théorème 1 (a), on sait qu'il suffit de montrer que S_q est borné sur $\mathrm{L}^p(0,T; X_q)$ pour un $p \in (1,\infty)$. On va montrer que c'est le cas pour $p = q$, soit donc que S_q est borné sur l'espace $\mathrm{L}^q(0,T; X_q) = \mathrm{L}^q((0,T) \times \mathcal{M}, \lambda \otimes \mathrm{m})$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 1 (b), on sait que ceci est vérifié pour $q = 2$. La stratégie est donc la suivante :

on montre d'abord que S_1 est du type $(1,1)$ faible, ainsi que S'_∞ (l'opérateur dual de S_∞). Par interpolation, on obtient ensuite le résultat escompté.

Montrer que S_1 est du type $(1,1)$ faible revient à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1((0,T) \times \mathcal{M}, \lambda \otimes \mathrm{m})$, on ait

$$\sup_{r>0} \{r\ (\lambda \otimes \mathrm{m})(\{(t,x) \in (0,T) \times \mathcal{M}; |S_1 f(t,x)| > r\})\} \leq C\|f\|_1.$$

Pour ce faire, on remarque d'abord que S_1 est du type $(1,1)$ faible sur $(0,T) \times \mathcal{M}$ si et seulement si l'opérateur R_1 défini par $R_1 f := 1_{(0,T)\times\mathcal{M}} S(1_{(0,T)\times\mathcal{M}} f)$, $f \in \mathrm{L}^1((0,T) \times \Omega, \lambda \otimes \mathrm{m})$, est du type $(1,1)$ faible sur $(0,T) \times \Omega$. Comme $(0,T) \times \Omega$ est un espace de type homogène, on peut appliquer à toute fonction $f \in \mathrm{L}^1((0,T) \times \Omega, \lambda \otimes \mathrm{m})$ une décomposition de Calderón–Zygmund (*voir* [9]), pour tout $r > 0$, en une « bonne » (« good ») partie g et une « mauvaise » (« bad ») partie b. Il est facile de voir que $(\lambda \otimes \mathrm{m})(\{(t,x) \in (0,T) \times \mathcal{M}; |R_1 g(t,x)| > r\})$ est borné par $c\ \frac{\|f\|_1}{r}$ pour une constante $c > 0$. Il s'agit ensuite de majorer $(\lambda \otimes \mathrm{m})(\{(t,x) \in (0,T) \times \mathcal{M}; |R_1 b(t,x)| > r\})$. En exploitant les conditions (A2) sur X_2 et (C) pour $q = 1$, on peut se ramener à une situation semblable à celle du cas autonome (i.e. $A(t) = A$ pour tout $t \in [0,T]$). C'est la condition (K) sur les noyaux k_t ($t \in [0,T]$) et les propriétés qu'implique cette estimation sur les dérivées partielles de k_t (*voir* [4]) qui permettent alors de conclure, comme dans le cas autonome [7], [3].

Pour montrer que S'_∞ est du type $(1,1)$ faible, on procède de la même manière que pour S_1. L'opérateur S'_∞ a une forme un peu différente de celle de S_1 : on s'y ramène en utilisant les conditions (A2) sur X_2 et (C) pour $q = \infty$. Ensuite, on peut appliquer les méthodes décrites plus haut pour obtenir le résultat annoncé.

Pour plus de détails, on pourra se référer à [6]. □

Références bibliographiques

[1] Acquistapace P., Terreni B., A unified approach to abstract linear nonautonomous parabolic equations, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 78 (1987) 47–107.

[2] Clément P., Li S., Abstract parabolic quasilinear equations and application to a groundwater flow problem, Adv. Math. Sci. Appl. 3 (1993/94) 17–32.

[3] Coulhon T., Duong X.T., Maximal regularity and kernel bounds: observations on a theorem by Hieber and Prüss, Prépublications de l'Université de Cergy-Pontoise n° 14/97, 1997.

[4] Duong X.T., Robinson D.W., Semigroup kernels, Poisson bounds, and holomorphic functional calculus, J. Funct. Anal. 142 (1996) 89–128.

[5] Hieber M., Monniaux S., Pseudo-differential operators and maximal regularity results for non-autonomous parabolic equations, Proc. Amer. Math. Soc. (1999) (to appear).

[6] Hieber M., Monniaux S., Heat-kernels and maximal $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$-estimates: the non-autonomous case, Preprint, 1998.

[7] Hieber M., Prüss J., Heat kernels and maximal $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$ estimates for parabolic evolution equations, Commun. Partial Differ. Eq. 22 (1997) 1647–1669.

[8] Rubio de Francia J.L., Ruiz F.J., Torrea J.L., Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels, Adv. Math. 62 (1986) 7–48.

[9] Stein E.M., Harmonic Analysis, Princeton University Press, 1993.