C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 663-668, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Uniqueness of mild solutions of the Navier–Stokes equation and maximal L^p-regularity

Sylvie MONNIAUX

Laboratoire de mathématiques fondamentales et appliquées, faculté des sciences de Saint-Jérôme, case Cour A, 13397 Marseille cedex 20, France
E-mail: sylvie.monniaux@math.u-3mrs.fr

(Reçu le 8 janvier 1999, accepté le 15 février 1999)

Abstract. In this Note, we give a new proof of the uniqueness of mild solutions of the Navier–Stokes equation in $\mathcal{C}([0,T);(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$. The main tool of the proof is the maximal L^p-regularity of the Laplacian in $(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3$. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Unicité des solutions « mild » de l'équation de Navier–Stokes et régularité maximale L^p

Résumé. *Dans cette Note, on donne une nouvelle preuve de l'unicité des solutions « mild » de l'équation de Navier–Stokes dans* $\mathcal{C}([0,T);(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$. *Celle-ci repose essentiellement sur la régularité maximale* L^p *du laplacien dans* $(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3$. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Version française abrégée

Soit $T>0$ fixé. On considère ici le problème d'unicité pour les solutions $u\in\mathcal{C}([0,T);(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$ du système de Navier–Stokes incompressible sous forme intégrale :

$$(*)\qquad \begin{cases} u(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}u_0+B(u,u)(t) & \text{for } t\in[0,T),\\ u(0)=u_0, \end{cases}$$

où $u_0\in E=(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3$ avec $\operatorname{div}(u_0)=0$, Δ est le laplacien dans $\mathbb{R}^3$ et B est la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$B(u,v)(t)=-\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\,\mathbb{P}\,\nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}\,(u(s)\otimes v(s))+\frac{1}{2}\,(v(s)\otimes u(s))\Big)\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray.

Note présentée par Yves Meyer.

Récemment, Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo ont montré l'unicité pour des données initiales arbitraires [5].

THÉORÈME 1. – *Si u et v sont des solutions « mild » de (*) sur $\mathcal{C}([0,T)\,;(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$, alors $u=v$ sur $[0,T)$.*

Si la forme bilinéaire B était continue sur $\mathcal{C}([0,T)\,;(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$, la démonstration de ce théorème serait immédiate. Mais ce n'est pas le cas (*voir* [9]). L'idée dans [5] était d'estimer $u-v$ dans $\mathrm{L}^\infty((0,T)\,;F)$ pour un espace F « proche » de E. Ils ont choisi pour F un espace de Besov, et ont utilisé l'analyse microlocale. Une simplification de cette preuve, donnée par Meyer [8], utilise comme espace F l'espace de Lorentz $\mathrm{L}^{3,\infty}$, qui a l'avantage de contenir E : la forme B est bicontinue sur $\mathcal{C}([0,T)\,;(\mathrm{L}^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))^3)$, la continuité en 0 étant à interpréter au sens de la topologie $*$-faible de $(\mathrm{L}^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))^3$. D'autres résultats d'unicité sont aussi à mentionner : Lions–Masmoudi [7] et Depauw [4]. L'idée de démonstration proposée dans cette Note est de travailler dans E et de moyenner en temps. On utilise pour cela la régularité maximale L^p bien connue pour le laplacien.

Plus précisément, si u, v sont deux solutions de (*) et si on pose $w=u-v$, alors on montre que pour $p\in(2,\infty)$, il existe $\tau_0\in(0,T]$ tel que

$$\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau_0)\,;E)}\le\frac{\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau_0)\,;E)}}{2}.$$

Ceci, ainsi que la continuité des solutions, implique que $u=v$ sur $[0,\tau_0)$. En itérant le procédé, on obtient alors que $u=v$ sur $[0,T)$.

Les propositions suivantes s'avèrent utiles pour montrer l'existence d'un tel τ_0.

PROPOSITION 2. – *Soient $p\in(1,\infty)$ et E défini plus haut. Alors il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $\tau>0$, on a*

$$\|B(u,v)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;E)}\le c\,\|u\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;E)}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;E)} \tag{1}$$

pour tout $u\in\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;E)$ et tout $v\in\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;E)$.

Idée de la démonstration. – Il est utile de remarquer que

$$B(u,v)(t)=\int_0^t\Delta\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}(-\Delta)^{-1}\mathbb{P}\,\nabla\cdot\Big(\frac12\,(u(s)\otimes v(s))+\frac12\,(v(s)\otimes u(s))\Big)\,\mathrm{d}s.$$

Pour montrer (1), on utilise la régularité maximale L^p du laplacien sur $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^3)$ (*voir* [1], Th. X.12) avec $q=3$, ainsi que le résultat suivant obtenu via l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev et le fait que les transformations de Riesz sont bornées dans $\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3)$: il existe une constante $\kappa>0$ telle que pour tous f, $g\in E$, on a $\|(-\Delta)^{-1}\mathbb{P}\nabla\cdot(f\otimes g)\|_E\le\kappa\,\|f\|_E\,\|g\|_E$. □

PROPOSITION 3. – *Soit $p\in(2,\infty]$. Alors il existe une constante $\gamma_p>0$ telle que pour tout $\tau>0$, l'opérateur $\mathcal{A}_\tau$, défini sur $\mathrm{L}^p(0,\tau)$ par :*

$$(\mathcal{A}_\tau g)(t)=\int_0^t(t-s)^{-\frac12}s^{-\frac12}g(s)\,\mathrm{d}s\quad \textit{pour } t\in(0,\tau),$$

est borné par γ_p.

La proposition 3 est une conséquence de l'inégalité de Hardy.

Idée de la démonstration du théorème 1. – Remarquons tout d'abord que si u et v sont deux solutions « mild » de (*), alors elles vérifient sur $[0,T)$

$$w=B(w,u+v-2Su_0)+2B(w,Su_0),$$

où S est le semi-groupe de la chaleur $(\mathrm{e}^{t\Delta})_{t\geq 0}$ (on rappelle que $w = u - v$). On fixe maintenant $p \in (2, \infty)$ et $\tau \in (0, T]$. L'estimation (1) donne alors

$$\|B(w, u + v - 2Su_0)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} \leq c\,\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}(\|u - Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} + \|v - Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)}).$$

D'autre part, remarquons que pour tout $u_0 \in E$, $f : s \mapsto \sqrt{s}\, S(s)u_0 \in \mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3))^3)$. Ainsi, on a

$$s \longmapsto \frac{1}{2}\big(w(s) \otimes \sqrt{s}\, S(s)u_0\big) + \frac{1}{2}\big(\sqrt{s}\, S(s)u_0 \otimes w(s)\big) \in \mathrm{L}^p\big((0,\tau)\,;\,E^3\big)$$

de norme bornée par $3\|f\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3))^3)}\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}$. En utilisant le fait que l'opérateur $S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot$ est borné de E^3 dans E, de norme plus petite que $C\,(t-s)^{-\frac{1}{2}}$, on a pour tout $t \in (0, \tau)$ et tout $u_0 \in E$, d'après la proposition 3,

$$\|B(w, Su_0)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} \leq 3\,C\,\gamma_p \|f\|_{(\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\times\mathbb{R}^3))^3}\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}.$$

Le théorème provient alors du résultat classique $\lim_{\tau\to 0} \|f\|_{(\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\times\mathbb{R}^3))^3} = 0$ (*voir* [8]), et de

$$\lim_{\tau\to 0} \|u - Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} = \lim_{\tau\to 0} \|v - Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} = 0. \qquad \square$$

Remarque 4. – La même démonstration fonctionne pour le système en dimension N avec des données initiales dans $(\mathrm{L}^N(\mathbb{R}^N))^N$.

Remarque 5. – On peut aussi adapter cette démonstration à l'équation de Navier–Stokes dans un ouvert « assez régulier » Ω de $\mathbb{R}^N$ en considérant les propriétés de l'opérateur de Stokes plutôt que celles du laplacien. Ceci sera étudié prochainement.

---

1. The result

Let $T > 0$. We consider the uniqueness problem for solutions $u \in \mathcal{C}([0,T)\,;\,(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$ of the incompressible Navier–Stokes system in integral form (i.e. mild solutions):

$$(*) \qquad \begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t) & \text{for } t \in [0,T), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Here $u_0 \in E = (\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3$ with $\operatorname{div}(u_0) = 0$, Δ is the Laplacian in $\mathbb{R}^3$ and B is the symmetric bilinear form given by

$$B(u,v)(t) = -\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\,\mathbb{P}\,\nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}\,(u(s)\otimes v(s)) + \frac{1}{2}\,(v(s)\otimes u(s))\Big)\,\mathrm{d}s,$$

where $\mathbb{P}$ is the Leray projector.

Recently, Furioli, Lemarié-Rieusset and Terraneo established uniqueness for arbitrary data [5].

THEOREM 1. – *Let u and v be mild solutions of* (*) *on* $\mathcal{C}([0,T)\,;\,(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$. *Then* $u = v$ *on* $[0,T)$.

Had the bilinear form been continuous on $\mathcal{C}([0,T)\,;\,(\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3))^3)$ then the proof would be a simple matter. But it is not the case (*see* [9]). Their idea was to get estimates for $u - v$ in $\mathrm{L}^\infty((0,T)\,;\,F)$

for some space F "near" E. They chose for F a Besov space and made use of Littlewood–Paley analysis. A simpler proof in [8] uses for F the Lorentz space $\mathrm{L}^{3,\infty}$, which advantage is to contain the space E: the form becomes bicontinuous on $\mathcal{C}([0,T)\,;\,(\mathrm{L}^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))^3)$, the continuity at 0 being taken in the weak-$*$ topology of $(\mathrm{L}^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))^3$. Let us mention also related uniqueness results: Lions–Masmoudi [7] (framework of weak solutions in regular domains D of $\mathbb{R}^N$, where the condition $u \in \mathcal{C}([0,T)\,;\,(\mathrm{L}^N(D))^N)$ is replaced by $u \in \mathrm{L}^\infty([0,T)\,;\,(\mathrm{L}^N(D))^N)$ if $N \geq 4$) and Depauw [4] (exterior domains). The idea proposed here is to keep working in E and instead to average in time. This makes the well-known maximal L^p-regularity for the Laplacian available.

More precisely, if u, v are two solutions of (*) and $w = u - v$, we claim that for a fixed $p \in (2,\infty)$, there exists $\tau_0 \in (0,T]$ such that

$$\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau_0)\,;\,E)} \leq \frac{\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau_0)\,;\,E)}}{2}.$$

This and continuity in time imply that $u = v$ on $[0,\tau_0)$. An iteration yields $u = v$ on $[0,T)$.

To prove this claim, we begin with the following equalities

$$\begin{aligned} u - v &= B(u,u) - B(v,v) = B(u-v,u+v) \\ &= B(u-v,u+v-2Su_0) + 2B(u-v,Su_0), \end{aligned}$$

where S is the heat semigroup $(\mathrm{e}^{t\Delta})_{t\geq 0}$.

Then the conclusion will follow from the:

Proposition 2. – *Let $p \in (1,\infty)$ and let E be as above. Then there exists a constant $c > 0$ such that for all $\tau > 0$,*

$$\|B(u,v)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} \leq c\,\|u\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} \tag{1}$$

holds for all $u \in \mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)$ and all $v \in \mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)$.

Proposition 3. – *Let $p \in (2,\infty]$. Then there exists a constant $\gamma_p > 0$ such that for all $\tau > 0$, the operator $\mathcal{A}_\tau$, defined on $\mathrm{L}^p(0,\tau)$ by:*

$$(\mathcal{A}_\tau g)(t) = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for } t \in (0,\tau)$$

is bounded by γ_p.

Indeed, let $p \in (2,\infty)$ and $\tau \in (0,T]$. The inequality (1) yields

$$\|B(w,u+v-2Su_0)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} \leq c\,\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}(\|u-Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} + \|v-Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)}).$$

Next, remark that for all $u_0 \in E$, $f : s \mapsto \sqrt{s}\,S(s)u_0 \in \mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3))^3)$. Therefore, one has

$$s \longmapsto \frac{1}{2}\big(w(s) \otimes \sqrt{s}\,S(s)u_0\big) + \frac{1}{2}\big(\sqrt{s}\,S(s)u_0 \otimes w(s)\big) \in \mathrm{L}^p\big((0,\tau)\,;\,E^3\big)$$

with norm bounded by $3\|f\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3))^3)}\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}$. Using the fact that the operator $S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot$ is bounded from E^3 to E, with norm less than $C\,(t-s)^{-\frac{1}{2}}$, one obtains for all $t \in (0,\tau)$ and all $u_0 \in E$, by Proposition 3

$$\|B(w,Su_0)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} \leq 3\,C\,\gamma_p\,\|f\|_{(\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\times\mathbb{R}^3))^3}\|w\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}.$$

The claim follows from the following classical result $\lim_{\tau\to 0}\|f\|_{(\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\times\mathbb{R}^3))^3} = 0$ (*see* [8], p. 84), and from the fact that $\lim_{\tau\to 0}\|u - Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} = \lim_{\tau\to 0}\|v - Su_0\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)} = 0$.

It remains to prove the propositions.

Proof of Proposition 2. – The first ingredient is a well-known maximal L^p-regularity result for the Laplacian in $\mathbb{R}^3$ (*see* [1], Th. X.12 and the references therein). For more general results on maximal L^p-regularity, *see* [3], [6] and [2] for instance. Let $q \in (1,\infty)$, $X = \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^3)$ and $p \in (1,\infty)$. Then there exists a constant $c_{p,q} > 0$ such that for all $\tau > 0$, for all $f \in \mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,X)$, there exists a unique $g \in \mathrm{W}^{1,p}((0,\tau)\,;\,X) \cap \mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,\mathrm{W}^{2,q}(\mathbb{R}^3))$, solution of $g' - \Delta g = f$ verifying moreover

$$\|g'\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,X)} + \|\Delta g\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,X)} \le c_{p,q}\,\|f\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,X)}. \tag{2}$$

It should be observed that this solution is given by $g(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta} f(s)\,\mathrm{d}s$. The second ingredient is the following estimate obtained via Hölder's inequality, Sobolev inequality and by boundedness of Riesz transforms on the Lebesgue space $\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3)$. There exists a constant $\kappa > 0$ such that for all $f, g \in E$,

$$\|(-\Delta)^{-1}\mathbb{P}\nabla\cdot(f\otimes g)\|_E \le \kappa\,\|f\|_E\,\|g\|_E. \tag{3}$$

To prove (1), we let $u \in \mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)$ and $v \in \mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)$. The inequality (3) implies that

$$f = (-\Delta)^{-1}\mathbb{P}\nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}(u\otimes v) + \frac{1}{2}(v\otimes u)\Big) \in \mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)$$

and $\|f\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} \le \kappa\|u\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)}$. Since $B(u,v)(t) = \int_0^t \Delta\mathrm{e}^{(t-s)\Delta} f(s)\,\mathrm{d}s$, the inequality (2) implies then

$$\begin{aligned}\|B(u,v)\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)} &\le 3c_{p,3}\,\|f\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}\\ &\le 3c_{p,3}\kappa\,\|u\|_{\mathrm{L}^p((0,\tau)\,;\,E)}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty((0,\tau)\,;\,E)}.\end{aligned}$$

□

Proof of Proposition 3. – If $p = \infty$, the result is immediate with $\gamma_\infty = \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s$. Let now $p \in (2,\infty)$ and choose $r \in (2,p)$. For all $t \in (0,\tau)$, one has

$$\begin{aligned}|(\mathcal{A}_\tau g)(t)| &= \Big|\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s\Big| = \Big|\int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} g(ts)\,\mathrm{d}s\Big|\\ &\le \Big(\int_0^1 (1-s)^{-\frac{r}{2(r-1)}} s^{-\frac{r}{2(r-1)}}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{r-1}{r}} \Big(\frac{1}{t}\int_0^t |g(s)|^r\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{r}}\\ &\le c(r)\Big(\frac{1}{t}\int_0^t |g(s)|^r\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

By the Hardy inequality applied in $\mathrm{L}^{\frac{p}{r}}(0,\tau)$, one obtains

$$\|\mathcal{A}_\tau g\|_{\mathrm{L}^p(0,\tau)} \le \widetilde{c}(r,p)\,\|g\|_{\mathrm{L}^p(0,\tau)}.$$

□

Remark 4. – The same argument works for the N-dimensional system with data in $(\mathrm{L}^N(\mathbb{R}^N))^N$.

Remark 5. – This proof can be adapted to the Navier–Stokes equation in an "enough regular" domain Ω of $\mathbb{R}^N$, considering the properties of the Stokes operator instead of the properties of the Laplacian. This will be studied in a near future.

Acknowledgements. The author would like to thank Pascal Auscher and Philippe Tchamitchian for their ideas about the unicity of the solutions of Navier–Stokes problem, and for their encouragement during this work.

References

[1] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Masson, 1983.

[2] Coulhon T., Duong X.T., Maximal regularity and kernel bounds: observations on a theorem by Hieber and Prüss, Prépublication de l'Université de Cergy-Pontoise, n° 14/97, 1997.

[3] Coulhon T., Lamberton D., Quelques remarques sur la régularité L^p du semi-groupe de Stokes, Commun. Partial Differ. Eq. 17 (1992) 287–304

[4] Depauw N., Solutions peu régulières des équations d'Euler et Navier–Stokes sur un domaine à bord, Thèse, Université Paris XIII, 1998.

[5] Furioli G., Lemarié-Rieusset P.-G., Terraneo E., Sur l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions « mild » des équations de Navier–Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris 325 Série I (1997) 1253–1256.

[6] Hieber M., Prüss J., Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates for parabolic evolution equations, Commun. Partial Differ. Eq. 22 (1997) 1647–1669.

[7] Lions P.-L., Masmoudi N., Unicité des solutions faibles de Navier–Stokes dans $L^N(\Omega)$, C. R. Acad. Sci. Paris 327 Série I (1998) 491–496.

[8] Meyer Y., Wavelets, paraproducts and Navier–Stokes equations, Memoir Amer. Math. Soc. (to appear).

[9] Oru F., Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non linéaire, Thèse, École normale supérieure de Cachan, 1998.