Équations aux dérivées partielles et leurs applications
Actes du colloque Edp-Normandie. Caen 2013. 75–86.
FNM Fédération Normandie Mathématiques

Le système de Navier-Stokes avec force de Coriolis dans un demi-espace à bord rugueux

Sylvie Monniaux*

Résumé. On se propose ici d'étudier le système de Navier-Stokes avec force de Coriolis dans un demi-espace ou une bande avec bord rugueux de type lipschitzien. Les méthodes utilisées relèvent de l'analyse harmonique, de l'analyse fonctionnelle et des techniques usuelles dans l'étude des équations aux dérivées partielles, comme l'intégration par parties et des théorèmes de point fixe. Le résultat principal est l'existence globale d'une solution de type intégral au système étudié, à condition que la norme (dans un espace critique pour le système de Navier-Stokes) de la condition initiale soit assez petite, cette petitesse ne dépendant pas de la vitesse de rotation intervenant dans la force de Coriolis.

Mots-clés. Navier-Stokes, Coriolis, frontière lipschitzienne, espace critique, solutions intégrales

1. Introduction

Le système de Navier-Stokes-Coriolis avec conditions au bord de type glissement de Navier (voir aussi [10] pour ces conditions au bord) que l'on étudie ici est de la forme

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u + \nabla\pi + \rho\, e \times u - u \times \operatorname{rot} u &=& 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega \\ \nu\cdot u = 0, \quad \nu\times\operatorname{rot} u = 0 && & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) &=& u_0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \tag{1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine du type

$$\Omega := \big\{x = (x_h, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\,;\, \omega(x_h) < x_3\big\} \quad \text{(demi-espace rugueux)} \tag{1.2}$$

(où on a utilisé la notation $x_h = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) ou

$$\Omega := \big\{x = (x_h, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\,;\, \omega(x_h) < x_3 < 0\big\}, \quad \text{(bande rugueuse)} \tag{1.3}$$

avec $\omega : \mathbb{R}^2 \to (-\infty, 0)$ une application uniformément lipschitzienne bornée, $\nu(x)$ représente le vecteur normal extérieur en presque tout point $x \in \partial\Omega$ (voir aussi le nouveau manuscrit d'Anne-Laure Dalibard et Christophe Prange [3] pour le cas du problème stationnaire et des conditions au bord de type Dirichlet). La direction de rotation est donnée par la verticale $e = e_3$, la vitesse

*LATP- CMI - Technopôle de Château-Gombert - 39 rue Frédéric Joliot-Curie - 13453 Marseille Cedex 13 – *sylvie.monniaux@univ-amu.fr*

de rotation est constante et vaut $\rho \in \mathbb{R}$. Le terme non linéaire $-u \times \operatorname{rot} u$ dans le système (1.1) est à rapprocher de la non linéarité classique de Navier-Stokes via l'identité suivante (valable pour des champs de vecteurs u suffisament réguliers) :

$$(u \cdot \nabla)u = \tfrac{1}{2}\nabla|u|^2 - u \times \operatorname{rot} u. \tag{1.4}$$

La condition initiale u_0 est considérée dans un espace critique pour le système de Navier-Stokes ; pour fixer les idées, disons l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}$.

Il est peut-être nécessaire d'expliquer les conditions au bord considérées dans (1.1). Dans le cas de la dimension 2 et du problème stationnaire, voir [5]. Pour une étude plus détaillée, on pourra se référer à [10, Section 2]. Pour un champ de vecteurs u assez régulier, les deux conditions

$$\nu \cdot u = 0 \quad \text{et} \quad \nu \times \operatorname{rot} u = 0 \qquad \text{(“free boundary”)} \tag{1.5}$$

et

$$\nu \cdot u = 0 \quad \text{et} \quad \big[(\nabla u + \nabla u^\top)\nu\big]_{\tan} = 0 \qquad \text{(“Navier's slip”)} \tag{1.6}$$

coïncident sur les parties plates de la frontière $\partial\Omega$. Dans le cas d'une frontière de classe $\mathcal{C}^2$ (ou au moins $\mathcal{C}^{1,1}$), les deux conditions diffèrent d'un terme d'ordre 0 faisant intervenir l'application de Weingarten.

Dans un premier temps, je propose de montrer des estimations de la norme L^2 de la trace d'un champ de vecteurs sur le bord $\partial\Omega$ en fonction des normes L^2 de sa divergence et de son rotationnel, sachant que sa trace normale, ou sa trace tangentielle, est nulle au bord. Je montrerai aussi une inégalité de type Poincaré (ne faisant pas intervenir la norme du gradient, mais seulement la norme de la divergence et du rotationnel) dans le cas d'une bande du type (1.3). J'utiliserai ces résultats afin de montrer des estimations fines sur les solutions du problème de Stokes-Coriolis (système (1.1) sans le terme non linéaire $-u \times \operatorname{rot} u$). Enfin, j'appliquerai ceci pour montrer l'existence d'une solution globale de (1.1) à condition que la condition initiale u_0 ne soit pas trop grande. Le cas de l'espace tout entier $\Omega = \mathbb{R}^3$ a été étudié dans [6]. Le résultat principal obtenu par les auteurs est qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, quelle que soit la vitesse de rotation ρ, pour toute condition initiale $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$ à divergence nulle et telle que $\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \epsilon$, le système (1.1) admet une solution $u \in \mathcal{C}(0,\infty; \dot{H}^{\frac{1}{2}})$.

Terminons cette introduction par une remarque : les techniques employées ici fonctionnent aussi pour des bandes “doublement rugueuses”, c'est-à-dire pour des domaines du type

$$\Omega := \big\{x = (x_h, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\,;\, \omega_1(x_h) < x_3 < \omega_2(x_h)\big\}, \tag{1.7}$$

avec $\omega_1 : \mathbb{R}^2 \to (-\infty, 0)$ et $\omega_2 : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$ deux applications uniformément lipschitziennes bornées. Dans un souci de clareté de l'exposition, on se limitera ici aux domaines Ω du type (1.2) ou (1.3).

2. Quelques outils bien utiles

Cette première partie peut être intéressante par elle-même. Je présente deux outils (le Théorème 2.1 qui donne une estimation des traces au bord de champs de vecteurs moins réguliers que H^1 et le Théorème 2.4 qui est une inégalité de type Poincaré) qui me seront utiles par la suite, et qui sont, à mon avis, d'un intérêt indépendant.

Notations. Pour une fonction f définie dans Ω (du type (1.2) ou (1.3)) différentiable presque partout, on note

$$\nabla_h f(x_h, x_3) = (\partial_1 f(x_1, x_2, x_3), \partial_2 f(x_1, x_2, x_3)), \quad (x_h = (x_1, x_2)),$$

le "gradient horizontal" de f.

Si u est un champ de vecteurs défini dans Ω (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$), différentiable presque partout, on note $u_h = (u_1, u_2)$ et

$$\mathrm{div}_h u_h(x_h, x_3) = \partial_1 u_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_2 u_2(x_1, x_2, x_3), \quad (x_h = (x_1, x_2)),$$

la "divergence horizontale" de u.

Pour Ω un domaine du type (1.2) ou (1.3), on note

$$\Gamma := \{x = (x_h, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = \omega(x_h)\} \tag{2.1}$$

($\Gamma = \partial\Omega$ dans le cas d'un demi-espace rugueux du type (1.2)), de telle sorte que la normale extérieure à Ω de Γ en un point $(x_h, \omega(x_h))$ vaut

$$\nu_\Gamma(x_h, \omega(x_h)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_h \omega(x_h)|^2}} (\nabla_h \omega(x_h), -1) \tag{2.2}$$

et

$$\Sigma := \{x = (x_h, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\} \tag{2.3}$$

($\Gamma \cup \Sigma = \partial\Omega$ dans le cas d'une bande rugueuse du type (1.3) ; dans ce cas, la normale extérieure à Ω sur Σ vaut $\nu_\Sigma = e$). On note $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ l'angle correspondant à

$$\cos\theta = \inf_{x_h \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_h \omega(x_h)|^2}} > 0, \tag{2.4}$$

de telle façon que $|e \cdot \nu_\Gamma(x_h, \omega(x_h))| \geq \cos\theta$ pour tout $x_h \in \mathbb{R}^2$ et

$$\|e \times \nu_\Gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \sin\theta. \tag{2.5}$$

2.1. Traces au bord

Le but de ce paragraphe est de donner une estimation de la trace au bord d'un champ de vecteurs de carré intégrable dont la divergence et le rotationnel sont de carré intégrable aussi, ayant des informations sur la trace normale ou la trace tangentielle de ce champ de vecteurs sur la frontière du domaine de type (1.2) ou (1.3). Dans le cas d'un domaine D lipschitzien borné, on a l'estimation suivante (voir [9, Theorem 11.2, estimation (11.13)], résultat prouvé dans le cadre plus général des formes différentielles L^p intégrables dans des domaines bornés lipschitziens de variétés riemanniennes de dimension quelconque) : pour $u \in L^2(D;\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{div} u \in L^2(D)$, $\operatorname{rot} u \in L^2(D;\mathbb{R}^3)$ et $\nu_{\partial D} \cdot u \in L^2(\partial D)$ ou $\nu_{\partial D} \times u \in L^2(\partial D, \mathbb{R}^3)$ ($\nu_{\partial D}$ désigne la normale extérieure à D sur le bord ∂D), on a

$$\begin{aligned}&\max\big\{\|\nu_{\partial D} \cdot u\|_{L^2(\partial D)}, \|\nu_{\partial D} \times u\|_{L^2(\partial D;\mathbb{R}^3)}\big\}\\ &\leq C\Big(\min\big\{\|\nu_{\partial D} \cdot u\|_{L^2(\partial D)}, \|\nu_{\partial D} \times u\|_{L^2(\partial D;\mathbb{R}^3)}\big\}\\ &+\|u\|_{L^2(D;\mathbb{R}^3)} + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(D)} + \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(D;\mathbb{R}^3)}\Big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

On montre alors le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1.

Soit $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$ *et* $\operatorname{rot} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

1. *Si* $\nu \cdot u = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *alors* $\nu \times u \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$ *et on a*

$$\begin{aligned}&\|\nu \times u\|^2_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)}\\ &\leq \frac{2}{\cos\theta}\big(\|e \times u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|e \cdot u\|_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dans ce cas,

$$\operatorname{Tr}_{|\partial\Omega} u = (\nu \times u) \times \nu \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3).$$

2. *Si* $\nu \times u = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *alors* $\nu \cdot u \in L^2(\partial\Omega)$ *et on a*

$$\begin{aligned}&\|\nu \cdot u\|^2_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)}\\ &\leq \frac{2}{\cos\theta}\big(\|e \times u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|e \cdot u\|_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dans ce cas,

$$\operatorname{Tr}_{|\partial\Omega} u = (\nu \cdot u)\, \nu \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3).$$

REMARQUE 2.2.

• Pour $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$, on peut définir $\nu \cdot u$ dans $\partial\Omega$ de la manière suivante : pour tout $\phi \in H^{\frac12}(\partial\Omega)$, on note Φ une extension à Ω dans $H^1(\Omega)$ (voir par exemple [7], Theorem 3, Chap. VII, S2, p. 197]) et on définit

$${}_{H^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle \nu \cdot u, \phi\rangle_{H^{\frac12}(\partial\Omega)} = \int_\Omega \Phi \operatorname{div} u\, dx + \int_\Omega u \cdot \nabla\Phi\, dx, \tag{2.9}$$

cette définition étant indépendante de l'extension Φ de ϕ choisie.

• De la même manière, pour $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{rot} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, on peut définir $\nu \times u$ comme distribution dans $H^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$ de la manière suivante : pour tout $\psi \in H^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$, on note Ψ une extension à Ω dans $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et on définit

$${}_{H^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)}\langle \nu \times u, \psi\rangle_{H^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)} = \int_\Omega \Psi \cdot \operatorname{rot} u\, dx - \int_\Omega u \cdot \operatorname{rot}\Psi\, dx, \tag{2.10}$$

cette définition étant indépendante de l'extension Ψ de ψ choisie.

Preuve. [Idée de la démonstration du Théorème 2.1] L'idée est de se contenter de montrer (2.7) et (2.8) pour des champs de vecteurs réguliers dans $\mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$. La formule suivante

$$\operatorname{rot}(e \times u) = e \times \operatorname{rot} u + e \operatorname{div} u - \nabla(e \cdot u), \tag{2.11}$$

(valable pour tout vecteur e constant), l'identité

$$u = (e \cdot u)\, e + (e \times u) \times e, \tag{2.12}$$

(valable pour tout vecteur e de norme 1) et en intégrant par parties sur Ω, les inégalités voulues. On conclut ensuite par densité de $\mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$ avec l'une ou l'autre des deux conditions au bord (trace normale nulle ou trace tangentielle nulle) dans l'un des deux espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \quad := \quad & \big\{u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3); \operatorname{div} u \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ & \text{et } \nu \cdot u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\big\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

ou

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}} \quad := \quad & \big\{u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3); \operatorname{div} u \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ & \text{et } \nu \times u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\big\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

(la construction de [1, Theorem 3.18] d'une suite régulière qui approche les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ fonctionne dans notre cas). On a alors

$$\text{pour tout } u \in \mathcal{W},\ \nu \times u \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3) \text{ et (2.9) a lieu} \tag{2.15}$$

et dans ce cas,

$$\operatorname{Tr}_{|\partial\Omega} u = (\nu \times u) \times \nu \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$$

et

$$\text{pour tout } u \in \widetilde{\mathcal{W}},\ \nu \cdot u \in L^2(\partial\Omega) \text{ et (2.10) a lieu} \tag{2.16}$$

et dans ce cas,

$$\operatorname{Tr}_{|\partial\Omega} u = (\nu \cdot u)\, \nu \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

REMARQUE 2.3.

1. Si $u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$ et $\nu \cdot u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\operatorname{div} \tilde{u} = \widetilde{\operatorname{div} u}$, où $u \mapsto \tilde{u}$ désigne l'extension dans $\mathbb{R}^3$ par 0.
2. Si $u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{rot} u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et $\nu \times u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\operatorname{rot} \tilde{u} = \widetilde{\operatorname{rot} u}$

2.2. Inégalité de Poincaré

Dans le cas d'un domaine lipschitzien borné $D \subset \mathbb{R}^3$, l'inégalité de Poincaré suivante a lieu (voir [10, Proposition 3.1]) : il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in L^2(D;\mathbb{R}^3)$ avec $\operatorname{div} u \in L^2(D)$, $\operatorname{rot} u \in L^2(D;\mathbb{R}^3)$ et soit $\nu \cdot u = 0$ sur ∂D, soit $\nu \times u = 0$ sur ∂D :

$$\|u\|_{L^2(D;\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|\operatorname{div} u\|_{L^2(D)} + \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(D;\mathbb{R}^3)}\right). \tag{2.17}$$

Le but ici est de montrer une telle estimation dans le cas d'un domaine lipschitizien borné dans une direction du type (1.3). Comme dans le paragraphe précédent, il suffit de montrer l'inégalité cherchée pour des champs de vecteurs dans $\mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$.

THÉORÈME 2.4.

Soit Ω *une bande rugueuse du type* (1.3). *On note* ℓ *la largeur de cette bande, c'est-à-dire*

$$\ell := \Big|\inf_{x_h\in\mathbb{R}^2}\omega(x_h)\Big| = \max_{x_h\in\mathbb{R}^2}|\omega(x_h)| \tag{2.18}$$

Pour tout $u \in \mathcal{W}$ *ou* $u \in \widetilde{\mathcal{W}}$, *sous l'hypothèse supplémentaire que* $\operatorname{div} u = 0$ *dans* Ω, *on a l'inégalité suivante*

$$\|u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \le 2\ell\Big(1+\frac{1}{\cos^3\theta}\Big)\big[\|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}\big], \tag{2.19}$$

où θ *est défini par* (2.4).

Preuve. [Idée de la démonstration] Comme indiqué plus haut, il suffit de montrer l'inégalité (2.19) pour des champs de vecteurs $u \in \mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$. On note

$$U(x_h,x_3) = \int_{\omega(x_h)}^{x_3} u(x_h,z)\,dz, \quad (x_h,x_3)\in\Omega. \tag{2.20}$$

Remarquons que $U = 0$ sur Γ par définition. En utilisant la formule

$$\partial_3 u = e\times \operatorname{rot} u + \nabla u_3, \tag{2.21}$$

on montre facilement que u se décompose en trois termes $a+b+c$ où a ne fait intervenir que la valeur de u sur le bord Γ et est constant le long des verticales $\{x_h = (x_1^0, x_2^0)\}$ de Ω, b s'exprime à l'aide de termes ne contenant que $\operatorname{div} u$ et $\operatorname{rot} u$ et c s'exprime en fonction de U, ce qui donne alors l'inégalité cherchée.

3. Le système de Navier-Stokes-Coriolis

On considère dans cette partie des ouverts Ω du type (1.2) ou (1.3). On note $H = L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs de carré intégrable et on munit $\mathcal{W}$ (défini par (11)) du produit scalaire

$$(u,v)\mapsto \langle u,v\rangle_{\mathcal{W}} = \langle u,v\rangle_H + \langle \operatorname{rot} u,\operatorname{rot} v\rangle_H + \langle \operatorname{div} u,\operatorname{div} v\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{3.1}$$

L'espace $\mathcal{W}$ est ainsi un espace de Hilbert, sous-espace dense de H. Sur $\mathcal{W}\times\mathcal{W}$, on définit la forme bilinéaire symétrique b par

$$b(u,v) = \langle \operatorname{div} u,\operatorname{div} v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \operatorname{rot} u,\operatorname{rot} v\rangle_H, \quad u,v\in\mathcal{W}.$$

Des arguments classiques d'analyse variationnelle nous permettent d'affirmer que l'opérateur associé $B_0 : V \to V'$ défini pour $u \in V$ par $B_0(u) : v \mapsto b(u,v)$ pour $v \in V$ est borné, auto-adjoint et sa part B dans H définie par

$$D(B) = \big\{u\in V; B_0u\in H\big\}, \quad Bu = B_0u$$

est l'opposé d'un générateur de semi-groupe holomorphe sur H. En suivant le raisonnement de [10], on peut identifier l'opérateur B de la manière suivante

$$\begin{aligned} D(B) &= \big\{u \in \mathcal{W}; \operatorname{rot}\operatorname{rot} u \in H, \nabla \operatorname{div} u \in H \text{ et } \nu \times \operatorname{rot} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\big\} \\ Bu &= -\Delta u. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarquons que la condition au bord $\nu \times \operatorname{rot} u = 0$ est à comprendre dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$, comme le suggère le deuxième point de la Remarque 2.2. On définit ensuite

$$\mathcal{G} = \big\{\nabla p; p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}) \text{ avec } \nabla p \in H\big\};$$

l'ensemble $\mathcal{G}$ est un sous-espace fermé de H. Soit maintenant

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^\perp = \big\{u \in H; \langle u, g\rangle_H = 0 \text{ for all } g \in \mathcal{G}\big\}.$$

Soit $J : \mathcal{H} \hookrightarrow H$ l'injection canonique de $\mathcal{H}$ sur H et définissons un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ par

$$(u, v) \mapsto \langle Ju, Jv\rangle_H.$$

Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et on a la décomposition de Helmholtz suivante :

$$H = \mathcal{H} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{G}.$$

On note $\mathbb{P}$ la projection orthogonale de H sur $\mathcal{H}$: $\mathbb{P}$ est égal à l'adjoint J' de J et $\mathbb{P}J = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Le résultat suivant a été prouvé dans un cas un peu plus général dans [10, Lemma 3.7] ; il caractérise la projection sur $\mathcal{H}$ de $-\Delta u$ pour $u \in D(B)$.

Lemme 3.1.

Pour tout $u \in D(B)$, on a $J\mathbb{P}u \in D(B)$ et $BJ\mathbb{P}u = J\mathbb{P}Bu$.

3.1. Propriétés du semi-groupe de Stokes-Coriolis

On définit l'opérateur de Stokes-Coriolis à l'aide de formes de la manière suivante. On montre que

$$\mathcal{H} := \big\{u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nu \cdot u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\big\}. \tag{3.3}$$

D'après la Remarque 2.2, la trace normale de u sur $\partial\Omega$ existe dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ si $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $\operatorname{div} u = 0 \in L^2(\Omega)$. Muni de la norme de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert. On note alors $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \mathcal{H}$: $\mathcal{V}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. On le munit du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_V := \langle u, v\rangle_H + \langle \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v\rangle_H \tag{3.4}$$

qui en fait un espace de Hilbert. Soit maintenant $\mathcal{W}'$ le dual de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{V}'$ le dual de $\mathcal{V}$. Soit J_0 l'injection canonique $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{W}$: elle est la restriction à $\mathcal{V}$ de l'injection $J : \mathcal{H} \hookrightarrow H$; ainsi, son adjoint $\mathbb{P}_1 = J_0' : \mathcal{W}' \to \mathcal{V}'$ est une extension de la projection de Leray $\mathbb{P} : H \to \mathcal{H}$.

On définit pour $u, v \in \mathcal{V}$,

$$a(u,v) = b(J_0 u, J_0 v) \quad \text{et} \quad c(u,v) = \int_\Omega \rho\,(e \times Ju)\cdot Jv\,dx. \tag{3.5}$$

La forme a est bilinéaire bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, symétrique, coercive ; la forme c est bilinéaire bornée sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, antisymétrique. L'opérateur de Stokes A avec conditions au bord de type Hodge dans $\mathcal{H}$ est l'opérateur associé à la forme a. Grâce au Lemme 3.1, il est défini par

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in \mathcal{V}; J_0 u \in D(B)\} \\ Au &= \mathbb{P} B J_0 u. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme a est symétrique, l'operator A est auto-adjoint, $D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{V}$ (d'après [8, Corollaire 5.2]) et $-A$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe de contractions d'angle $\frac{\pi}{2}$, $(e^{-tA})_{t\geq 0}$.

PROPOSITION 3.2.
Le domaine de $A^{\frac{1}{4}}$ muni de la norme $u \mapsto \|A^{\frac{1}{4}}u\|_2$ est continûment inclus dans $L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Preuve. D'après un résultat récent de Costabel, M^cIntosh et Taggart dans [2, Theorem 4.1], il existe deux opérateurs de type Bogovsk*u*ıi T_1 et T_2 vérifiant

$$\begin{aligned} &T_1 : L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \to W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3), \\ &T_2 : L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \to W_0^{1,p}(\Omega), \quad T_2 : W^{-1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ \text{et } &\nabla T_1 u + T_2 \operatorname{rot} u = u \text{ pour tout } u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ &\text{tel que } \operatorname{rot} u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

et ce, pour tout $p \in (1,\infty)$. En appliquant ceci à $u \in \mathcal{H}$, on obtient $T_2 \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et pour u tel que $\operatorname{rot} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, on voit facilement grâce aux inclusions de Sobolev que $T_2 \operatorname{rot} u \in L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Ainsi, si $u \in D(\dot{A}^{\frac{1}{4}})$, on a $T_2 \operatorname{rot} u \in L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Enfin, on applique la projection de Leray $\mathbb{P}$ (bornée sur L^3, cf. [4, Theorem 11.1]) à la relation (3.7) et on obtient

$$\text{pour tout } u \in D(\dot{A}^{\frac{1}{4}}),\ u = \mathbb{P}\, T_2 \operatorname{rot} u \in L^3(\Omega;\mathbb{R}^3), \tag{3.8}$$

l'opérateur $\mathbb{P}\, T_2 \operatorname{rot} : D(\dot{A}^{\frac{1}{4}}) \to L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$ étant continu.

DÉFINITION 3.3.
L'opérateur de Stokes-Coriolis A_C dans $\mathcal{H}$ est l'operator associé à la forme $a + c$. Son domaine coïncide avec $D(A)$, $A_C = A + C$, où C est l'opérateur borné associé à la forme c.

REMARQUE 3.4.
L'opérateur C est défini sur $\mathcal{H}$ par $Cu = \rho\mathbb{P}(e \times Ju)$. Comme la forme c est anti-symétrique, l'opérateur C est anti-adjoint, et $\langle Cu, u\rangle = c(u,u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{H}$.

Les estimations suivantes seront utiles pour traiter le terme non linéaire de (1.1).

PROPOSITION 3.5.

L'opérateur $-A_C$ *engendre un semi-groupe de contractions* $(T_C(t))_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{H}$ *et on a les propriétés suivantes :*

(*i*)

$$\big(t \mapsto T_C(t)\big) \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(\mathcal{H})) \tag{3.9}$$

$$\textit{et } \big(t \mapsto A^{\frac{1}{2}} T_C(t)\big) \in L^2(0,\infty;\mathcal{L}(\mathcal{H})), \tag{3.10}$$

avec normes plus petites que 1 *;*

(*ii*) *Dans le cas d'une bande rugueuse* Ω *du type* (1.3), *si* ρ *(vitesse de rotation),* ℓ *(largeur de la bande) et* θ *(angle maximum entre la verticale et la normale au bord) vérifient*

$$\ell^2|\rho|\tan\theta\Big(1+\frac{1}{\cos^3\theta}\Big)^2 \leq \frac{1}{2}, \tag{3.11}$$

alors

$$\big(t \mapsto T_C(t)\big) \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(\mathcal{V})) \tag{3.12}$$

avec norme plus petite que 1 *;*

(*iii*)

$$\big(t \mapsto A^{\frac{1}{4}} T_C(t) A^{\frac{1}{4}}\big) \in L^2(0,\infty;\mathcal{L}(\mathcal{H})), \tag{3.13}$$

$$\big(t \mapsto A^{\frac{1}{4}} T_C(t) A^{\frac{1}{2}}\big) \in L^{\frac{4}{3}}(0,\infty;\mathcal{L}(\mathcal{H})), \tag{3.14}$$

$$\textit{et } \big(t \mapsto A^{\frac{1}{2}} T_C(t) A^{\frac{1}{2}}\big) \in L^1(0,\infty;\mathcal{L}(\mathcal{H})), \tag{3.15}$$

avec normes plus petites que 1.

Preuve. [Idées de la démonstration] Le fait que $-A_C$ engendre un semi-groupe de contractions provient directement de la théorie des opérateurs associés à des formes sur des espaces de Hilbert (voir par exemple [11, Chap. 1]).

La propriété (3.10) provient directement de l'égalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u(s)\|_2^2 + \langle A_C u(s), u(s)\rangle = 0, \quad s \geq 0. \tag{3.16}$$

La propriété (3.12) provient aussi de l'égalité d'énergie. On peut montrer que dans le cas dans lequel on se place, grâce aux estimations de la partie 2, on a, en posant $u(t) = T_C(t)f$ pour $f \in \mathcal{V}$,

$$|\langle Au, Cu\rangle_H| \leq \|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u\|_H^2 = \|Au\|_H^2,$$

ce qui permet de montrer que la fonction $t \mapsto \|\mathrm{rot}\,u(t)\|_H = \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|_H$ est décroissante. Remarquons que dans le cas d'un demi-espace plat $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 < 0\}$, on a $\langle Au, Cu\rangle_H = 0$, ce qui donne (3.12) sans aucune condition sur la vitesse de rotation ρ. Pour prouver (3.13), (3.14) et (3.15), on raisonne sur le semi-groupe adjoint T_C^* ; son générateur est $-(A+C)^* = -(A-C)$, et $-C$ est aussi anti-adjoint. On conclut alors par interpolation et inégalité de Hölder.

REMARQUE 3.6.
En interpolant entre (3.9) et (3.12), on obtient

$$\big(t \mapsto T_C(t)\big) \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(D(A^{\frac{1}{4}}))) \tag{3.17}$$

avec norme plus petite que 1

3.2. Existence de solutions du problème non linéaire

On définit l'espace de Banach $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E} = L^\infty(0,\infty;D(\dot{A}^{\frac{1}{4}})) \cap L^4(0,\infty;\dot{\mathcal{V}}) \tag{3.18}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{E}} = \|A^{\frac{1}{4}}u\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))} + \|\mathrm{rot}\, J_0 u\|_{L^4(0,\infty;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))}.$$

Notre problème de trouver des solutions intégrales à (1.1) se ramène alors à résoudre l'équation différentielle

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) + Cu(t) &= \mathbb{P}_1\big(J_0 u \times \mathrm{rot}\, J_0 u\big) \\ u(0) &= u_0, \quad u \in \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

pour laquelle une solution intégrale est donnée par la formule de Duhamel : $u = \alpha + \phi(u,u)$, où, pour $t > 0$,

$$\alpha(t) = T_C(t)u_0 \quad \text{et}$$

$$\phi(u,v)(t) = \int_0^t T_C(t-s)\Big(\tfrac{1}{2}\mathbb{P}_1\big(J_0u(s) \times \mathrm{rot}\, J_0 v(s) + J_0 v(s) \times \mathrm{rot}\, J_0 u(s)\big)\Big)\, ds. \tag{3.20}$$

La stratégie que l'on suit pour trouver $u \in \mathcal{E}$ qui satisfait $u = \alpha + \phi(u,u)$ est d'appliquer un théorème de point fixe. Il faut s'assurer que $\mathcal{E}$ est un "bon" espace pour le problème, c'est-à-dire que $\alpha \in \mathcal{E}$ et $\phi(u,u) \in \mathcal{E}$.

PROPOSITION 3.7.
L'application $\phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est bilinéaire, continue et symétrique. Soit M sa norme :

$$M = \sup\big\{\|\phi(u,v)\|_{\mathcal{E}}; u,v \in \mathcal{E}, \|u\|_{\mathcal{E}}, \|v\|_{\mathcal{E}} \le 1\big\}.$$

Notons que sous la condition (3.11)*, la constante M ne dépend pas de ρ.*

Preuve. Le fait que ϕ est bilinéaire et symétrique provient directement de sa définition, dès que l'on a prouvé qu'elle était bien définie. Pour $u, v \in \mathcal{E}$, soit f définie par

$$f(t) = -\tfrac{1}{2}\mathbb{P}_1\big(J_0u(t) \times \mathrm{rot}\, J_0v(t) + J_0v(t) \times \mathrm{rot}\, J_0u(t)\big), \quad t \in (0,\infty). \tag{3.21}$$

Par définition de $\mathcal{E}$ et l'injection de Sobolev de la Proposition 3.2, on voit que

$$t \mapsto J_0u(t) \times \mathrm{rot}\, J_0v(t) + J_0v(t) \times \mathrm{rot}\, J_0u(t) \in L^2(0,\infty;\dot{\mathcal{W}}')$$

ce qui implique que

$$t \mapsto \mathbb{P}_1\big(J_0u(t) \times \operatorname{rot} J_0v(t) + J_0v(t) \times \operatorname{rot} J_0u(t)\big) \hookrightarrow \dot{\mathcal{V}}'$$

et pour tout $\lambda_t \in (0,1]$,

$$\big\|(\lambda_t \operatorname{Id} + A)^{-\frac{1}{2}} f(t)\big\|_2 \leq C\left(\|u(t)\|_3 \|\operatorname{rot} J_0v(t)\|_2 + \|v(t)\|_3\|\operatorname{rot} J_0u(t)\|_2\right)$$

où C est une constante indépendante de t, ce qui montre que $t \mapsto (\lambda_t \operatorname{Id} + A)^{-\frac{1}{2}} f(t)$ appartient à $L^4(0,\infty;\mathcal{H})$ et satisfait l'estimation suivante

$$\Big(\int_0^\infty \big\|(\lambda_t \operatorname{Id} + A)^{-\frac{1}{2}} f(t)\big\|_2^4 \, dt\Big)^{\frac{1}{4}} \leq C\,\|u\|_{\mathcal{E}}\|v\|_{\mathcal{E}} \tag{3.22}$$

Ainsi, en choisissant $\lambda_s = \frac{1}{1+(t-s)^2}$, on a

$$\|\operatorname{rot} J_0\phi(u,v)(t)\|_2 \leq \int_0^t \|A^{\frac{1}{2}} T_C(t-s)\big(\tfrac{1}{1+(t-s)^2} \operatorname{Id} + A\big)^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(H)} \tag{3.23}$$
$$C\left(\|u(s)\|_3\|\operatorname{rot} J_0v(s)\|_2 + \|v(s)\|_3\|\operatorname{rot} J_0u(s)\|_2\right) ds.$$

En posant $k(t) = \|A^{\frac{1}{2}} T_C(t)(\frac{1}{1+t^2} \operatorname{Id} + A)^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(H)}$, par (3.10), (3.15) et le fait que $t \mapsto \big(\frac{1}{1+t^2}\big)^{\frac{1}{2}}$ appartient à $L^2(0,\infty)$, la fonction k appartient à $L^1(0,\infty)$. De plus, pour $u, v \in \mathcal{E}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \|u(s)\|_3\|\operatorname{rot} J_0v(s)\|_2 + \|v(s)\|_3\|\operatorname{rot} J_0u(s)\|_2$ appartient à $L^4(0,\infty)$. Ainsi, par l'inégalité de Young, on obtient

$$t \mapsto k \star \varphi(t) = \int_0^t k(t-s)\varphi(s)\, ds \in L^4(0,\infty).$$

Ceci prouve que $\phi(u,v) \in L^4(0,\infty;\dot{\mathcal{V}})$ et

$$\|\phi(u,v)\|_{L^4(0,\infty;\dot{\mathcal{V}})} \leq C\,\|u\|_{\mathcal{E}}\|v\|_{\mathcal{E}}.$$

D'autre part, par le même raisonnement, en changeant la fonction k par la fonction κ définie par $\kappa(t) = \|A^{\frac{1}{4}} T_C(t)(\frac{1}{1+t^2} \operatorname{Id} + A)^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(H)}$ (il est facile de voir que $\kappa \in L^{\frac{4}{3}}(0,\infty)$) et en utilisant (3.15), on montre que

$$t \mapsto \kappa \star \varphi(t) = \int_0^t \kappa(t-s)\varphi(s)\, ds \in L^\infty(0,\infty)$$

avec l'estimation

$$\|\phi(u,v)\|_{L^\infty(0,\infty;L^3(\Omega;\mathbb{R}^3))} \leq C\,\|u\|_{\mathcal{E}}\|v\|_{\mathcal{E}},$$

où on a utilisé l'injection (3.8). Ainsi, la forme bilinéaire symétrique ϕ est continue de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$.

THÉORÈME 3.8.

Pour tout $u_0 \in D(\dot{A}^{\frac{1}{4}})$ avec $\|A^{\frac{1}{4}} u_0\|_2 < \frac{1}{4M}$, il existe $u \in \mathcal{E}$ vérifiant $\|u\|_{\mathcal{E}} < \frac{1}{2M}$ solution de $u = \alpha + \phi(u,u)$, où α et ϕ ont été définis dans (3.20).

Preuve. L'existence d'un point fixe pour $u = \alpha + \phi(u,u)$ provient directement du théorème du point fixe de Picard.

Remarque 3.9.
Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$, Hieber et Shibata ont prouvé dans [6, Proposition 2.4, eq.(2.11)] que pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, et tout $f \in D(A^{\frac{1}{4}}) = H_\sigma^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, on a $\big\| t \mapsto \|A^{\frac{1}{4}} T_C(t) f\|_2 \big\|_\infty \leq C \|A^{\frac{1}{4}} f\|_2$ où $C > 0$ est une constante indépendante de ρ.

Ces résultats proviennent du fait que dans l'espace tout entier, les opérateurs $A = -\Delta$ et $C : u \mapsto \mathbb{P}(\rho\, e \times u)$ commutent sur $D(A) = H_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$. L'indice σ désigne comme il est d'usage que l'on considère des champs de vecteurs à divergence nulle.

Bibliographie

[1] Robert A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, 1975.

[2] Martin Costabel, Alan M$^{\mathrm{c}}$Intosh et Robert J. Taggart, Potential maps, Hardy spaces, and tent spaces on special Lipschitz domains. À paraître dans Publ. Mat., 2013.

[3] Anne-Laure Dalibard et Christophe Prange, Well-posedness of the Stokes-Coriolis system in the half-space over a rough surface. Prépublication arxiv1304.6651, 2013.

[4] Eugene Fabes, Osvaldo Mendez et Marius Mitrea, Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains. J. Funct. Anal. 159, 323–368, 1998.

[5] David Gérard-Varet et Nader Masmoudi, Relevance of the Slip Condition for Fluid Flows Near an Irregular Boundary. Comm. Math. Phys. 295 :99-137, 2010.

[6] Matthias Hieber et Yoshihiro Shibata, The Fujita-Kato approach to the Navier-Stokes equations in the rotational framework. Math. Z. 265481–491, 2010.

[7] Alf Jonsson et Hans Wallin, Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$. Math. Rep. 2 (1984), no. 1, xiv+221 pp.

[8] Jacques-Louis Lions, Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan 14233–241, 1962.

[9] Dorina Mitrea, Marius Mitrea et Michael Taylor, Layer potentials, the Hodge Laplacian and global boundary problems in nonsmooth Riemannian manifolds. Memois of the Amer. Math. Soc. Vol. 150, Nr 713, 2001.

[10] Marius Mitrea et Sylvie Monniaux, The nonlinear Hodge-Navier-Stokes equations in Lipschtiz domains. Diff. Int. Eq. 22339–356, 2009.

[11] El Maati Ouhabaz, Analysis of heat equations on domains, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 31, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

Colloque Fédération Normandie-Mathématiques

EDP - Normandie

24 & 25 Octobre 2013

Université de Caen Basse-Normandie
UFR de Sciences, Campus 2
Département de Mathématiques

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Laurent Boudin (LJLL, Paris)
Ionut Danaila (LMRS, Rouen)
Thierry Goudon (INRIA, Nice)
Rabah Labbas (LMAH, Le Havre)
Taoufik Sassi (LMNO, Caen)

COMITÉ D'ORGANISATION

Christian Dogbe (LMNO, Caen)
Mohammed Louaked (LMNO, Caen)

CONFÉRENCIERS

Chérif Amrouche (Pau)
Nicolas Besse (Nancy)
Vincent Calvez (Lyon)
Maria J. Esteban (Paris)
Jean-Frédéric Gerbeau (Paris)
Pauline Lafitte-Godillon (Paris)
Yvon Maday (Paris)
Simona Mancini (Orléans)
Sylvie Monniaux (Aix-Marseille)
Marie Postel (Paris)
Delphine Salort (Paris)
Rodolphe Turpault (Nantes)
Nicolas Vauchelet (Paris)

Université de Caen Basse-Normandie
UFR de Sciences
Campus 2, Côte de Nacre
Bd Maréchal Juin
14032 Caen

Fédération
Normandie-Mathématiques
FR CNRS 3335

Fiche d'inscription sur le site WEB de la conférence
Date limite d'inscription : 15 Octobre 2013

Site Web: http://edp-normandie2.sciencesconf.org/
Blog: http://edp-normandie2.blogspot.fr/
Email: edp-normandie2@sciencesconf.org