# Équations de Navier-Stokes

Sylvie Monniaux

Univ. Paul Cézanne
Aix-Marseille 3

Habilitation à diriger des recherches - 3 avril 2007

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
    - Opérateur de Stokes
    - Existence locale de solutions régulières
    - Unicité des solutions intégrales
    - Perspectives : cas des domaines lipschitziens

2. Conditions de frontière libre
    - Le Laplacien de Hodge
    - Existence locale de solutions régulières
    - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Cadre de l'exposé : dimension 3

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné ou non, régulier ou non ;
$\nu(x)$ désigne la normale extérieure en un point $x \in \partial\Omega$.

On étudie le mouvement d'un fluide incompressible dans $\Omega$ sur un intervalle de temps $[0, T]$.

**Les inconnues**

$u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ désigne la vitesse du fluide,
$\pi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ désigne sa pression.

# Cadre de l'exposé : dimension 3

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné ou non, régulier ou non ;
$\nu(x)$ désigne la normale extérieure en un point $x \in \partial\Omega$.

On étudie le mouvement d'un fluide incompressible dans $\Omega$ sur un intervalle de temps $[0, T]$.

**Les inconnues**

$u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ désigne la vitesse du fluide,
$\pi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ désigne sa pression.

# Les équations

## Conditions au bord de Dirichlet

$$(DNS)\quad \left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\pi + (u\cdot\nabla)u & = & 0 & \text{sur } ]0,T]\times\Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \text{sur } ]0,T]\times\Omega \\ \nu\cdot u & = & 0 & \text{sur } ]0,T]\times\partial\Omega \\ \nu\times u & = & 0 & \text{sur } ]0,T]\times\partial\Omega \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x\in\Omega. \end{array}\right.$$

▸ MRL ▸ lip ▸ (H3) ▸ unicité

# Conditions au bord modifiées

La relation

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla(\tfrac{1}{2}|u|^2) + u \times \text{rot } u$$

permet d'écrire les équations modifiées suivantes

**Conditions de frontière libre**

$$(HNS)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\tilde{\pi} + u \times \text{rot } u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \text{div } u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \nu \cdot u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \\ \nu \times \text{rot } u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

solutionHNS persp

# Conditions au bord modifiées

La relation

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla(\tfrac{1}{2}|u|^2) + u \times \mathrm{rot}\ u$$

permet d'écrire les équations modifiées suivantes

## Conditions de frontière libre

$$(HNS) \left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \tilde{\pi} + u \times \mathrm{rot}\ u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \mathrm{div}\ u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \nu \cdot u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \\ \nu \times \mathrm{rot}\ u & = & 0 & \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

▸ solutionHNS ▸ persp

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Cadre fonctionnel

On définit

$$\mathcal{G} = \{\nabla p; p \in L^2_{loc}(\Omega;\mathbb{C}) \text{ avec } \nabla p \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)\},$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^\perp \quad \text{orthogonal dans } L^2(\Omega;\mathbb{C}^3),$$

$$\mathbb{P} : L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \to \mathcal{H} \quad \text{projection orthogonale (de Leray)},$$
$$J : \mathcal{H} \to L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \quad \text{injection canonique} \;:\; J' = \mathbb{P},$$

$$\mathcal{V} = H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}, \quad J_0 = J|_{\mathcal{V}}, \quad \mathbb{P}_1 = J_0' : H^{-1}(\Omega;\mathbb{C}^3) \to \mathcal{V}'$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_i J_0 u \cdot \overline{\partial_i J_0 v}\, dx, \quad u,v \in \mathcal{V}.$$

# Cadre fonctionnel

On définit

$$\mathcal{G} = \{\nabla p ; p \in L^2_{loc}(\Omega;\mathbb{C}) \text{ avec } \nabla p \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)\},$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^\perp \quad \text{orthogonal dans } L^2(\Omega;\mathbb{C}^3),$$

$$\mathbb{P} : L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \to \mathcal{H} \quad \text{projection orthogonale (de Leray)},$$
$$J : \mathcal{H} \to L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \quad \text{injection canonique} \quad : \quad J' = \mathbb{P},$$

$$\mathcal{V} = H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}, \quad J_0 = J|_{\mathcal{V}}, \quad \mathbb{P}_1 = J_0' : H^{-1}(\Omega;\mathbb{C}^3) \to \mathcal{V}'$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_i J_0 u \cdot \overline{\partial_i J_0 v}\, dx, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

# Cadre fonctionnel

On définit

$$\mathcal{G} = \{\nabla p; p \in L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{C}) \text{ avec } \nabla p \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)\},$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^\perp \quad \text{orthogonal dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}^3),$$

$$\mathbb{P} : L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \to \mathcal{H} \quad \text{projection orthogonale (de Leray)},$$
$$J : \mathcal{H} \to L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \quad \text{injection canonique} \quad : \quad J' = \mathbb{P},$$

$$\mathcal{V} = H^1_0(\Omega; \mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}, \quad J_0 = J|_{\mathcal{V}}, \quad \mathbb{P}_1 = J_0' : H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^3) \to \mathcal{V}'$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_i J_0 u \cdot \overline{\partial_i J_0 v}\, dx, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

# Cadre fonctionnel

On définit

$$\mathcal{G} = \{\nabla p ; p \in L^2_{loc}(\Omega;\mathbb{C}) \text{ avec } \nabla p \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)\},$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^\perp \quad \text{orthogonal dans } L^2(\Omega;\mathbb{C}^3),$$

$$\mathbb{P} : L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \to \mathcal{H} \quad \text{projection orthogonale (de Leray)},$$
$$J : \mathcal{H} \to L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \quad \text{injection canonique} \quad : \quad J' = \mathbb{P},$$

$$\mathcal{V} = H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}, \quad J_0 = J|_{\mathcal{V}}, \quad \mathbb{P}_1 = J_0' : H^{-1}(\Omega;\mathbb{C}^3) \to \mathcal{V}'$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_i J_0 u \cdot \overline{\partial_i J_0 v}\, dx, \quad u, v \in \mathcal{V}.$$

# Définition de l'opérateur de Stokes

## Opérateur associé à la forme *a*

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in \mathcal{V} \,;\, \mathbb{P}_1 \Delta J_0 u \in \mathcal{H} \right\} \\ Au &= \mathbb{P}_1 (-\Delta_D^\Omega) J_0 u \end{aligned}$$

où $\Delta_D^\Omega$ est le Laplacien-Dirichlet sur $\Omega$.

## Propriétés

- $A$ est auto-adjoint, inversible si $\Omega$ est borné,
- $-A$ engendre un semi-groupe holomorphe sur $\mathcal{H}$,
- $D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{V}$.

# Définition de l'opérateur de Stokes

## Opérateur associé à la forme $a$

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in \mathcal{V} \,;\, \mathbb{P}_1 \Delta J_0 u \in \mathcal{H} \right\} \\ Au &= \mathbb{P}_1(-\Delta_D^\Omega) J_0 u \end{aligned}$$

où $\Delta_D^\Omega$ est le Laplacien-Dirichlet sur $\Omega$.

## Propriétés

- $A$ est auto-adjoint, inversible si $\Omega$ est borné,
- $-A$ engendre un semi-groupe holomorphe sur $\mathcal{H}$,
- $D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{V}$.

# Définition classique

## Théorème [de Rham]

Soit $\varphi \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^3)$. Alors $\mathbb{P}_1 \varphi = 0$ si et seulement s'il existe $\pi \in L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$ tel que $\varphi = \nabla \pi$.

## Définition équivalente

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in \mathcal{V}; \exists \pi \in L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{C}), -\Delta u + \nabla \pi \in \mathcal{H} \right\} \\ Au &= -\Delta_D^\Omega u + \nabla \pi \end{aligned}$$

# Définition classique

## Théorème [de Rham]

Soit $\varphi \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Alors $\mathbb{P}_1\varphi = 0$ si et seulement s'il existe $\pi \in L^2_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ tel que $\varphi = \nabla\pi$.

## Définition équivalente

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{u \in \mathcal{V}; \exists\pi \in L^2_{loc}(\Omega;\mathbb{C}), -\Delta u + \nabla\pi \in \mathcal{H}\right\} \\ Au &= -\Delta_D^\Omega u + \nabla\pi \end{aligned}$$

# Cas des domaines réguliers

**Théorème [Y. Giga,1981]**

Dans le cas où $\Omega$ est borné régulier (de bord $\mathscr{C}^2$), le semi-groupe engendré par $-A$ s'étend en un semi-groupe analytique sur

$$\mathcal{H}_p = \left\{ u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^3); \text{div } u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nu \cdot u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

pour tout $p \in ]1, \infty[$. (H3)

De plus, le domaine de $A$ sur $\mathcal{H}_p$ est exactement $\mathcal{H}_p \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{C}^3) \cap W^{2,p}(\Omega; \mathbb{C}^3)$.

# Cas des domaines réguliers

**Théorème [Y. Giga,1981]**

Dans le cas où $\Omega$ est borné régulier (de bord $\mathscr{C}^2$), le semi-groupe engendré par $-A$ s'étend en un semi-groupe analytique sur

$$\mathcal{H}_p = \left\{ u \in L^p(\Omega;\mathbb{C}^3); \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nu \cdot u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

pour tout $p \in ]1,\infty[$. (H3)

De plus, le domaine de $A$ sur $\mathcal{H}_p$ est exactement $\mathcal{H}_p \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{C}^3) \cap W^{2,p}(\Omega;\mathbb{C}^3)$.

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Solution intégrale

Soit $A$ un opérateur sur un espace de Banach $X$ tel que $-A$ engendre un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

## Définition

On appelle solution intégrale du problème de Cauchy

$$u'(t) + Au(t) = f(t),\ t \in ]0, T], \quad u(0) = u_0$$

la fonction $u : [0, T] \to X$ définie par

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds.$$

regmax unicité solutionHNS

# Solution de $(DNS)$, cas hilbertien

## Théorème [Mathematical Research Letters, 2006]

Pour tout $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$, il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant

$$u \in \mathscr{C}([0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})) \cap \mathscr{C}^1(]0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})).$$

Si $\|A^{\frac{1}{4}} u_0\|_2$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

## Remarques

- L'espace $D(A^{\frac{1}{4}})$ est critique (parties linéaire et non linéaire d'égale "importance") pour l'équation $(DNS)$.
- Les cas $\Omega = \mathbb{R}^3$ et $\Omega$ borné régulier ont été prouvés par H. Fujita et T. Kato en 1964.

# Solution de $(DNS)$, cas hilbertien

## Théorème [Mathematical Research Letters, 2006]

Pour tout $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$, il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant

$$u \in \mathscr{C}([0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})) \cap \mathscr{C}^1(]0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})).$$

Si $\|A^{\frac{1}{4}} u_0\|_2$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

## Remarques

- L'espace $D(A^{\frac{1}{4}})$ est critique (parties linéaire et non linéaire d'égale "importance") pour l'équation $(DNS)$.
- Les cas $\Omega = \mathbb{R}^3$ et $\Omega$ borné régulier ont été prouvés par H. Fujita et T. Kato en 1964.

# Solution de $(DNS)$, cas hilbertien

## Théorème [Mathematical Research Letters, 2006]

Pour tout $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$, il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant

$$u \in \mathscr{C}([0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})) \cap \mathscr{C}^1(]0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})).$$

Si $\|A^{\frac{1}{4}} u_0\|_2$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

## Remarques

- L'espace $D(A^{\frac{1}{4}})$ est critique (parties linéaire et non linéaire d'égale “importance”) pour l'équation $(DNS)$.
- Les cas $\Omega = \mathbb{R}^3$ et $\Omega$ borné régulier ont été prouvés par H. Fujita et T. Kato en 1964.

# Éléments de la preuve

- On cherche une solution au problème de point fixe $u = \alpha + \Phi(u,u)$ dans un espace de Banach $\mathcal{E}_T$ où $\Phi : \mathcal{E}_T \times \mathcal{E}_T \to \mathcal{E}_T$ est bilinéaire continue et $\alpha$ dépend de la condition initiale ($\alpha(0) = u_0$).
- Problème : trouver l'espace $\mathcal{E}_T$ contenant $\mathscr{C}([0,T]; D(A^{\frac{1}{4}}))$ tel que $\alpha \in \mathcal{E}_T$ et pour lequel $\Phi(u,v)$ a un sens.
- Cette procédure est la même pour toutes les preuves d'existence de solutions intégrales pour $(DNS)$.

# Cas d'un domaine lipschitzien

Si $\Omega$ est borné à bord lipschitzien, on peut caractériser les domaines des puissances de l'opérateur $A$.
En particulier, $D(A^{\frac{3}{4}}) \subset W^{1,3}(\Omega)$.

**Théorème [avec M. Mitrea, 2006]**

Pour $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ la solution intégrale de $(DNS)$ (DNS) est dans $\mathscr{C}^1(]0, T]; D(A^{\frac{3}{4}}))$.
L'équation $(DNS)$ est de plus vérifiée partout en $t \in ]0, T]$ et presque partout en $x \in \Omega$.

**Remarque**

P. Deuring et W. von Wahl ont montré en 1995 un résultat similaire pour $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$.

# Cas d'un domaine lipschitzien

Si $\Omega$ est borné à bord lipschitzien, on peut caractériser les domaines des puissances de l'opérateur $A$.
En particulier, $D(A^{\frac{3}{4}}) \subset W^{1,3}(\Omega)$.

## Théorème [avec M. Mitrea, 2006]

Pour $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ la solution intégrale de $(DNS)$ (DNS) est dans $\mathscr{C}^1(]0,T]; D(A^{\frac{3}{4}}))$.
L'équation $(DNS)$ est de plus vérifiée partout en $t \in ]0,T]$ et presque partout en $x \in \Omega$.

## Remarque

P. Deuring et W. von Wahl ont montré en 1995 un résultat similaire pour $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$.

# Cas de $L^p$

**Théorème [Y. Giga, T. Miyakawa, 1985]**

Soit $\Omega$ un domaine régulier. Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}_3$ (Hp), il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant $u \in \mathscr{C}([0, T]; \mathcal{H}_3)$.
Si $\|u_0\|_3$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

Éléments de la preuve :
- Analyticité du semi-groupe engendré par l'opérateur de Stokes sur $\mathcal{H}_3$.
- Caractérisation du domaine de l'opérateur de Stokes.

**Remarque**

L'espace $\mathcal{H}_3$ est critique pour $(DNS)$.

# Cas de $L^p$

**Théorème [Y. Giga, T. Miyakawa, 1985]**

Soit $\Omega$ un domaine régulier. Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}_3$ (Hp), il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant $u \in \mathscr{C}([0, T]; \mathcal{H}_3)$.
Si $\|u_0\|_3$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

Éléments de la preuve :
- Analyticité du semi-groupe engendré par l'opérateur de Stokes sur $\mathcal{H}_3$.
- Caractérisation du domaine de l'opérateur de Stokes.

**Remarque**

L'espace $\mathcal{H}_3$ est critique pour $(DNS)$.

# Cas de $L^p$

**Théorème [Y. Giga, T. Miyakawa, 1985]**

Soit $\Omega$ un domaine régulier. Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}_3$ (Hp), il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant $u \in \mathscr{C}([0, T]; \mathcal{H}_3)$.
Si $\|u_0\|_3$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

Éléments de la preuve :
- Analyticité du semi-groupe engendré par l'opérateur de Stokes sur $\mathcal{H}_3$.
- Caractérisation du domaine de l'opérateur de Stokes.

**Remarque**

L'espace $\mathcal{H}_3$ est critique pour $(DNS)$.

# Cas de $L^p$

**Théorème [Y. Giga, T. Miyakawa, 1985]**

Soit $\Omega$ un domaine régulier. Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}_3$ (Hp), il existe $T > 0$ tel que $(DNS)$ (DNS) admette une solution intégrale $u$ sur $[0, T]$ vérifiant $u \in \mathscr{C}([0, T]; \mathcal{H}_3)$.
Si $\|u_0\|_3$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

Éléments de la preuve :
- Analyticité du semi-groupe engendré par l'opérateur de Stokes sur $\mathcal{H}_3$.
- Caractérisation du domaine de l'opérateur de Stokes.

**Remarque**

L'espace $\mathcal{H}_3$ est critique pour $(DNS)$.

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Régularité maximale

Soit $A$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach $X$. Soit $p \in ]1, +\infty[$.

## Définition

On dit que $A$ admet la propriété de régularité maximale $L^p$ (on note $(MR_p)$ si pour toute $f \in L^p(0, T; X)$, le problème de Cauchy

$$u'(t) + Au(t) = f(t),\ t \in ]0, T[, \quad u(0) = 0$$

admet une unique solution intégrale mild
$u \in L^p(0, T; D(A)) \cap W^{1,p}(0, T; X)$.

## Propriétés

- La propriété de régularité maximale $L^p$ est indépendante de $p \in ]1, +\infty[$.
- Un opérateur avec $(MR_p)$ engendre un semi-groupe holomorphe.
- Un générateur de semi-groupe holomorphe sur un espace de Hilbert a la propriété $(MR_p)$ [deSimon, 1964].
- Un opérateur ayant des puissances imaginaires bornées sur un espace de Banach $(UMD)$ a la propriété $(MR_p)$ [Dore-Venni, 1987].

## Mes contributions [avec J. Prüss, 1997 et avec M. Hieber, 2000]

Versions non autonomes des résultats précédents : $A$ est remplacé par une famille d'opérateurs $\{A(t), t \in [0, T]\}$.

## Propriétés

- La propriété de régularité maximale $L^p$ est indépendante de $p \in ]1, +\infty[$.
- Un opérateur avec $(MR_p)$ engendre un semi-groupe holomorphe.
- Un générateur de semi-groupe holomorphe sur un espace de Hilbert a la propriété $(MR_p)$ [deSimon, 1964].
- Un opérateur ayant des puissances imaginaires bornées sur un espace de Banach $(UMD)$ a la propriété $(MR_p)$ [Dore-Venni, 1987].

## Mes contributions [avec J. Prüss, 1997 et avec M. Hieber, 2000]

Versions non autonomes des résultats précédents : $A$ est remplacé par une famille d'opérateurs $\{A(t), t \in [0, T]\}$.

## Exemples

- Un opérateur avec des estimations gaussiennes a la propriété $(MR_p)$ [Hieber-Prüss, 1997 & Coulhon-Duong, 2000].
  En particulier, le Laplacien-Dirichlet sur $L^p(\Omega)$ pour tout ouvert $\Omega$.
  Version non-autonome [avec M. Hieber, 2000].
- Dans le cas d'un domaine $\Omega$ régulier borné ou extérieur, l'opérateur de Stokes sur $\mathcal{H}_q$ ($q \in ]1, +\infty[$) a des puissances imaginaires bornées [Giga-Sohr, 1993].

# Unicité

## Théorème [Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., 1999]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier borné ou extérieur ou encore $\Omega = \mathbb{R}^3$. Alors il existe au plus une solution intégrale ▸ mild de $(DNS)$ dans $\mathscr{C}([0, T]; \mathcal{H}_3)$. ▸ (DNS)

## Remarques

- Ce résultat est vrai en toute dimension $d \geq 3$ (en remplaçant $\mathcal{H}_3$ par $\mathcal{H}_d$).
- La première preuve de ce résultat est due à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo [2000].

# Unicité

## Théorème [Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., 1999]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier borné ou extérieur ou encore $\Omega = \mathbb{R}^3$. Alors il existe au plus une solution intégrale mild de $(DNS)$ dans $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$. (DNS)

## Remarques

- Ce résultat est vrai en toute dimension $d \geq 3$ (en remplaçant $\mathcal{H}_3$ par $\mathcal{H}_d$).
- La première preuve de ce résultat est due à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo [2000].

# Éléments de la preuve

- On suppose que l'on a deux solutions intégrales $u, v \in \mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$ :
$$u = \alpha + \Phi(u,u) \quad \text{et} \quad v = \alpha + \Phi(v,v).$$
- On note $w = u - v$ : $w = \Phi(w,u) + \Phi(v,w)$, et on montre que $\|w\|_X \leq c(T)\|w\|_X$ où $X$ est un espace bien choisi et $c(T) \xrightarrow[T\to 0]{} 0$.
- Problème : trouver l'espace $X$ contenant $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$ sur lequel $\Phi$ est continue.
- Une solution : remplacer $\mathcal{H}_3$ par un espace de Besov [Furioli, Lemarié-Rieusset, Terraneo].
- Autre solution : remplacer $\mathscr{C}([0,T])$ par un espace $L^p$ et utiliser la régularité maximale [CRAS, 1999].

# Éléments de la preuve

- On suppose que l'on a deux solutions intégrales $u, v \in \mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$ :
$$u = \alpha + \Phi(u,u) \quad \text{et} \quad v = \alpha + \Phi(v,v).$$
- On note $w = u - v$ : $w = \Phi(w,u) + \Phi(v,w)$, et on montre que $\|w\|_X \leq c(T)\|w\|_X$ où $X$ est un espace bien choisi et $c(T) \xrightarrow[T\to 0]{} 0$.
- Problème : trouver l'espace $X$ contenant $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$ sur lequel $\Phi$ est continue.
- Une solution : remplacer $\mathcal{H}_3$ par un espace de Besov [Furioli, Lemarié-Rieusset, Terraneo].
- Autre solution : remplacer $\mathscr{C}([0,T])$ par un espace $L^p$ et utiliser la régularité maximale [CRAS, 1999].

# Cas des domaines lipschitziens

**Théorème [Journal of Functional Analysis, 2002]**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien. Alors il existe au plus une solution intégrale mild de $(DNS)$ dans $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$. (DNS)

Éléments de la preuve :

- Se ramener d'abord à un problème au bord.
- Utilisation d'un résultat de régularité maximale au bord dû à Z. Shen [1991].

**Remarque**

Ce résultat est vrai aussi en toute dimension $d \geq 3$ [Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2003].

# Cas des domaines lipschitziens

**Théorème [Journal of Functional Analysis, 2002]**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien. Alors il existe au plus une solution intégrale ▸ mild de $(DNS)$ dans $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$. ▸ (DNS)

Éléments de la preuve :

- Se ramener d'abord à un problème au bord.
- Utilisation d'un résultat de régularité maximale au bord dû à Z. Shen [1991].

**Remarque**

Ce résultat est vrai aussi en toute dimension $d \geq 3$ [Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2003].

# Cas des domaines lipschitziens

**Théorème [Journal of Functional Analysis, 2002]**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien. Alors il existe au plus une solution intégrale mild de $(DNS)$ dans $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$. (DNS)

Éléments de la preuve :
- Se ramener d'abord à un problème au bord.
- Utilisation d'un résultat de régularité maximale au bord dû à Z. Shen [1991].

**Remarque**

Ce résultat est vrai aussi en toute dimension $d \geq 3$ [Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2003].

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Semi-groupe holomorphe dans $L^p$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien.

**Exemple [P. Deuring, 2001]**

L'opérateur de Stokes n'engendre pas de semi-groupe holomorphe sur $\mathcal{H}_p$ pour $p$ loin de 2.

**Conjecture [M. Taylor, 2000]**

L'opérateur de Stokes engendre un semi-groupe holomorphe (et a la propriété de régularité maximale ?) sur $\mathcal{H}_p$ pour $p \in [\frac{3}{2}, 3]$.

**Remarque [Fabes-Mendez-Mitrea, 1998]**

Projection de Leray $\mathbb{P} : L^p \to \mathcal{H}_p$ bornée pour $\frac{3}{2} \le p \le 3$.

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Cadre fonctionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien. On note

$$V = \Big\{u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3); \text{div } u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}),\ \text{rot } u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)\ \&\ \nu \cdot u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_V = \left(\|u\|_2^2 + \|\text{div } u\|_2^2 + \|\text{rot } u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Hilbert, dense dans $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, non contenu dans $H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$.

Sur $V \times V$, on définit la forme $b$ par

$$b(u,v) = \int_\Omega \text{rot } u \cdot \text{rot } \overline{v}\, dx + \int_\Omega \text{div } u\, \text{div } \overline{v}\, dx.$$

# Cadre fonctionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien. On note

$$V = \Big\{ u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3); \mathrm{div}\, u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}),\ \mathrm{rot}\, u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)\ \&\ \nu \cdot u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_V = \left( \|u\|_2^2 + \|\mathrm{div}\, u\|_2^2 + \|\mathrm{rot}\, u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Hilbert, dense dans $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, non contenu dans $H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$.

Sur $V \times V$, on définit la forme $b$ par

$$b(u,v) = \int_\Omega \mathrm{rot}\, u \cdot \mathrm{rot}\, \overline{v}\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, u\, \mathrm{div}\, \overline{v}\, dx.$$

# Définition

## Laplacien de Hodge

L'opérateur $B$ associé à la forme $b$ est appelé Laplacien de Hodge sur $\Omega$ ; il est auto-adjoint, inversible et $-B$ engendre un semi-groupe holomorphe sur $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$.

On vérifie facilement

$$\begin{aligned} D(B) &= \{u \in V; \text{rot rot } u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3), \text{div } v \in H^1(\Omega;\mathbb{C}) \\ &\quad \text{avec } \nu \cdot u = 0 \text{ et } \nu \times \text{rot } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ Bu &= -\Delta u. \end{aligned}$$

## Propriété [avec M. Mitrea, 2006]

Le Laplacien de Hodge $B$ et la projection de Leray $\mathbb{P}$ commutent.

# Définition

### Laplacien de Hodge

L'opérateur $B$ associé à la forme $b$ est appelé Laplacien de Hodge sur $\Omega$ ; il est auto-adjoint, inversible et $-B$ engendre un semi-groupe holomorphe sur $L^2(\Omega;\mathbb{C}^3)$.

On vérifie facilement

$$\begin{aligned} D(B) &= \{u \in V; \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, u \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^3), \mathrm{div}\, v \in H^1(\Omega;\mathbb{C}) \\ &\quad \text{avec } \nu \cdot u = 0 \text{ et } \nu \times \mathrm{rot}\, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ Bu &= -\Delta u. \end{aligned}$$

### Propriété [avec M. Mitrea, 2006]

Le Laplacien de Hodge $B$ et la projection de Leray $\mathbb{P}$ commutent.

# Comportement sur $L^p$

**Théorème [avec M. Mitrea, 2006]**

Le Laplacien de Hodge sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine borné lipschitzien engendre un semi-groupe holomorphe sur $L^p(\Omega; \mathbb{C}^3)$ pour tout $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$ où $q_\Omega > 3$ et $\frac{1}{p_\Omega} + \frac{1}{q_\Omega} = 1$.

**Théorème [avec S. Hofmann et M. Mitrea, 2007]**

Les transformées de Riesz rot $B^{-\frac{1}{2}} : L^p(\Omega; \mathbb{C}^3) \to L^p(\Omega; \mathbb{C}^3)$ et div $B^{-\frac{1}{2}} : L^p(\Omega; \mathbb{C}^3) \to L^p(\Omega; \mathbb{C})$ sont bornées pour $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$.

Preuve : estimations hors diagonale de la résolvante de $B$.

# Comportement sur $L^p$

**Théorème [avec M. Mitrea, 2006]**

Le Laplacien de Hodge sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine borné lipschitzien engendre un semi-groupe holomorphe sur $L^p(\Omega; \mathbb{C}^3)$ pour tout $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$ où $q_\Omega > 3$ et $\frac{1}{p_\Omega} + \frac{1}{q_\Omega} = 1$.

**Théorème [avec S. Hofmann et M. Mitrea, 2007]**

Les transformées de Riesz rot $B^{-\frac{1}{2}} : L^p(\Omega; \mathbb{C}^3) \to L^p(\Omega; \mathbb{C}^3)$ et div $B^{-\frac{1}{2}} : L^p(\Omega; \mathbb{C}^3) \to L^p(\Omega; \mathbb{C})$ sont bornées pour $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$.

Preuve : estimations hors diagonale de la résolvante de $B$.

# Comportement sur $L^p$

**Théorème [avec M. Mitrea, 2006]**

Le Laplacien de Hodge sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine borné lipschitzien engendre un semi-groupe holomorphe sur $L^p(\Omega; \mathbb{C}^3)$ pour tout $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$ où $q_\Omega > 3$ et $\frac{1}{p_\Omega} + \frac{1}{q_\Omega} = 1$.

**Théorème [avec S. Hofmann et M. Mitrea, 2007]**

Les transformées de Riesz rot $B^{-\frac{1}{2}} : L^p(\Omega; \mathbb{C}^3) \to L^p(\Omega; \mathbb{C}^3)$ et div $B^{-\frac{1}{2}} : L^p(\Omega; \mathbb{C}^3) \to L^p(\Omega; \mathbb{C})$ sont bornées pour $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$.

Preuve : estimations hors diagonale de la résolvante de $B$.

# L'opérateur de Stokes-Hodge

**Définition**

On note $A$ l'opérateur

$$D(A) = D(B) \cap \mathcal{H}_2, \quad Au = -\Delta u.$$

L'opérateur $A$ est appelé l'opérateur de Stokes-Hodge.

Comme $B$ et $\mathbb{P}$ commutent, les propriétés de $B$ se transfèrent à l'opérateur $A$.
En particulier, $-A$ engendre un semi-groupe holomorphe sur $\mathcal{H}_p$ pour tout $p \in ]p_\Omega, q_\Omega[$.

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

**Théorème [avec M. Mitrea, 2006]**

Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}_3$, il existe $T > 0$ tel que $(HNS)$ (HNS) admette une solution intégrale mild $u$ sur $[0, T]$ vérifiant

$$u \in \mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3) \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\, u \in \mathscr{C}(]0,T];\mathcal{H}_3)$$

Si $\|u_0\|_3$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

Éléments de la preuve :

- Analyticité du semi-groupe de Stokes-Hodge.
- Traitement de la non linéarité $u \times \mathrm{rot}\, u$ en particulier grâce à un inverse du rotationnel [avec D. Mitrea et M. Mitrea, 2006].

**Théorème [avec M. Mitrea, 2006]**

Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}_3$, il existe $T > 0$ tel que $(HNS)$ (HNS) admette une solution intégrale mild $u$ sur $[0, T]$ vérifiant

$$u \in \mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3) \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} u \in \mathscr{C}(]0,T];\mathcal{H}_3)$$

Si $\|u_0\|_3$ est assez petit, alors on peut prendre $T = +\infty$.

<u>Éléments de la preuve</u> :

- Analyticité du semi-groupe de Stokes-Hodge.
- Traitement de la non linéarité $u \times \operatorname{rot} u$ en particulier grâce à un inverse du rotationnel [avec D. Mitrea et M. Mitrea, 2006].

# Plan de l'exposé

1. Conditions de Dirichlet au bord
   - Opérateur de Stokes
   - Existence locale de solutions régulières
   - Unicité des solutions intégrales
   - Perspectives : cas des domaines lipschitziens
2. Conditions de frontière libre
   - Le Laplacien de Hodge
   - Existence locale de solutions régulières
   - Perspectives : régularité maximale et équations d'Euler

# Régularité maximale pour le Laplacien de Hodge

**Conjecture**

Les estimations hors diagonale prouvées pour le Laplacien de Hodge peuvent être utilisées pour montrer la propriété de régularité maximale.

Ceci pourrait alors être utilisé pour donner une preuve de l'unicité des solutions de $(HNS)$ (HNS) dans l'espace $\mathscr{C}([0,T];\mathcal{H}_3)$.

# Équations d'Euler

## Euler

$$(E)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\pi + (u\cdot\nabla)u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\Omega \\ \nu\cdot u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\partial\Omega \end{cases}$$

comme limite lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 de

## Dirichlet-Navier-Stokes

$$(DNS)_\varepsilon\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\Delta u + \nabla\pi + (u\cdot\nabla)u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\Omega \\ \nu\cdot u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\partial\Omega \\ \nu\times u = 0 & \text{sur } ]0,T]\times\partial\Omega \end{cases}$$

avec condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$, $x\in\Omega$.

# Équations d'Euler

**Euler**

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \tilde{\pi} + u \times \text{rot } u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \text{div } u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \nu \cdot u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

comme limite lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 de

**Hodge-Navier-Stokes**

$$(HNS)_\varepsilon \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \nabla \tilde{\pi} + u \times \text{rot } u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \text{div } u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \Omega \\ \nu \cdot u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \\ \nu \times \text{rot } u &= 0 \quad \text{sur } ]0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

avec condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in \Omega$.